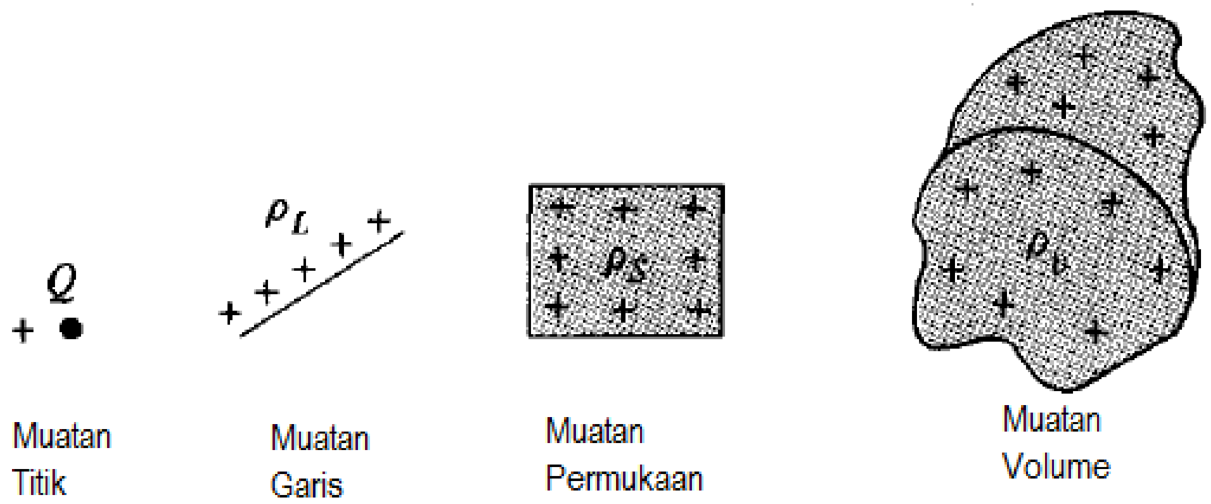
4.3. MEDAN LISTRIK OLEH DISTRIBUSI MUATAN KONTINYU

Selain muatan berbentuk titik, dimungkinkan juga distribusi muatan kontinyu dalam bentuk garis, permukaan atau volume seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.3.



Gambar 4.3 Berbagai distribusi dan elemen muatan

Muatan garis, permukaan dan volume tersebut masing-masing memiliki kerapatan muatan ρ_L (dalam C/m), ρ_S (dalam C/m^2) dan ρ_V (dalam C/m^3).

Elemen muatan *dQ* dan muatan total *Q* yang ditimbulkan oleh distribusi muatan tersebut adalah

$$dQ = \rho_L \, dl \rightarrow Q = \int_L \rho_L \, dl \qquad \text{(muatan garis)} \qquad (4.13a)$$

$$dQ = \rho_S \, dS \rightarrow Q = \int_S \rho_S \, dS \qquad \text{(muatan permukaan)} \qquad (4.13b)$$

$$dQ = \rho_v \, dv \rightarrow Q = \int_v \rho_v \, dv \qquad \text{(muatan volume)} \qquad (4.13c)$$

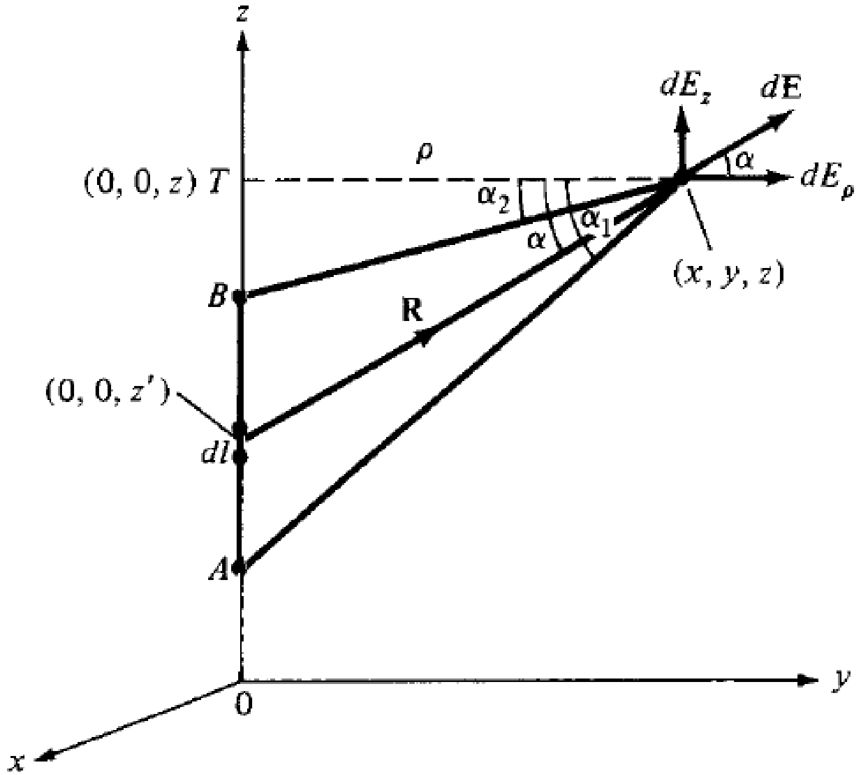
Intensitas medan listrik yang ditimbulkan oleh distribusi muatan ρ_L, ρ_S dan ρ_V adalah

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_L \, dl}{4\pi\varepsilon_o R^2} \mathbf{a}_R \qquad \text{(muatan garis)} \qquad (4.14)$$

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_S \, dS}{4\pi\varepsilon_o R^2} \mathbf{a}_R \qquad \text{(muatan permukaan)} \qquad (4.15)$$

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_v \, dv}{4\pi\varepsilon_o R^2} \mathbf{a}_R \qquad \text{(muatan volume)} \qquad (4.16)$$

A. Muatan Garis



Gambar 4.4 Medan listrik **E** oleh muatan garis

Perhatikan muatan garis dengan kerapatan muatan seragam ρ_L memanjang dari A ke B sepanjang sumbu-*z* seperti ditunjukkan oleh Gambar 4.4. Elemen muatan *dQ* yang bersesuaian dengan elemen dl = *dz* dari garis adalah

$$dQ = \rho_L\, dl = \rho_L\, dz$$

dan karenanya, total muatan *Q* adalah

$$Q = \int_{z_A}^{z_B} \rho_L\, dz \qquad (4.17)$$

Intensitas medan listrik **E** pada sembarang titik *P(x, y, z)* dapat dicari dengan menggunakan persamaan (4.14). Bila titik tempat medan yang akan dicari berada di (x, y, z) dan titik sumber di (x', y', z'), maka dari Gambar 4.4,

$$dl = dz'$$

$$\mathbf{R} = (x, y, z) - (0, 0, z') = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + (z - z')\mathbf{a}_z$$

atau

$$\mathbf{R} = \rho\mathbf{a}_\rho + (z - z')\,\mathbf{a}_z$$

$$R^2 = |\mathbf{R}|^2 = x^2 + y^2 + (z - z')^2 = \rho^2 + (z - z')^2$$

$$\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} = \frac{\rho\mathbf{a}_\rho + (z - z')\mathbf{a}_z}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

Substitusi ke persamaan (4.14), diperoleh

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{\rho\mathbf{a}_\rho + (z - z')\,\mathbf{a}_z}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}}\,dz' \qquad (4.18)$$

Untuk mengevaluasi ini, didefinisikan α, α_1, dan α_2 seperti pada Gambar 4.4.

$$R = \left[\rho^2 + (z - z')^2\right]^{1/2} = \rho \sec \alpha$$

$$z' = OT - \rho \tan \alpha, \qquad dz' = -\rho \sec^2 \alpha \, d\alpha$$

Persamaan (4.18) menjadi

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{-\rho_L}{4\pi\varepsilon_o} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho \sec^2 \alpha \, [\cos \alpha \, \mathbf{a}_\rho + \sin \alpha \, \mathbf{a}_z] \, d\alpha}{\rho^2 \sec^2 \alpha} \\ &= -\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_o \rho} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [\cos \alpha \, \mathbf{a}_\rho + \sin \alpha \, \mathbf{a}_z] \, d\alpha \end{aligned} \tag{4.19}$$

Untuk muatan garis berhingga,

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_o\rho} [-(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)\mathbf{a}_\rho + (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)\mathbf{a}_z] \tag{4.20}$$

Sebagai kasus khusus, untuk muatan garis tak-terhingga, titik B berada di $(0,0,\infty)$ dan A di $(0,0,-\infty)$ sehingga $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha 2 = -\pi/2$; komponen-z hilang dan persamaan (4.20) menjadi

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 \rho}\,\mathbf{a}_\rho} \tag{4.21}$$

B. Muatan Permukaan

Perhatikan lembaran tak terhingga dari muatan pada bidang-xy dengan kerapatan muatan seragam ρ_S. Muatan yang bersesuaian dengan elemen luas *dS* adalah

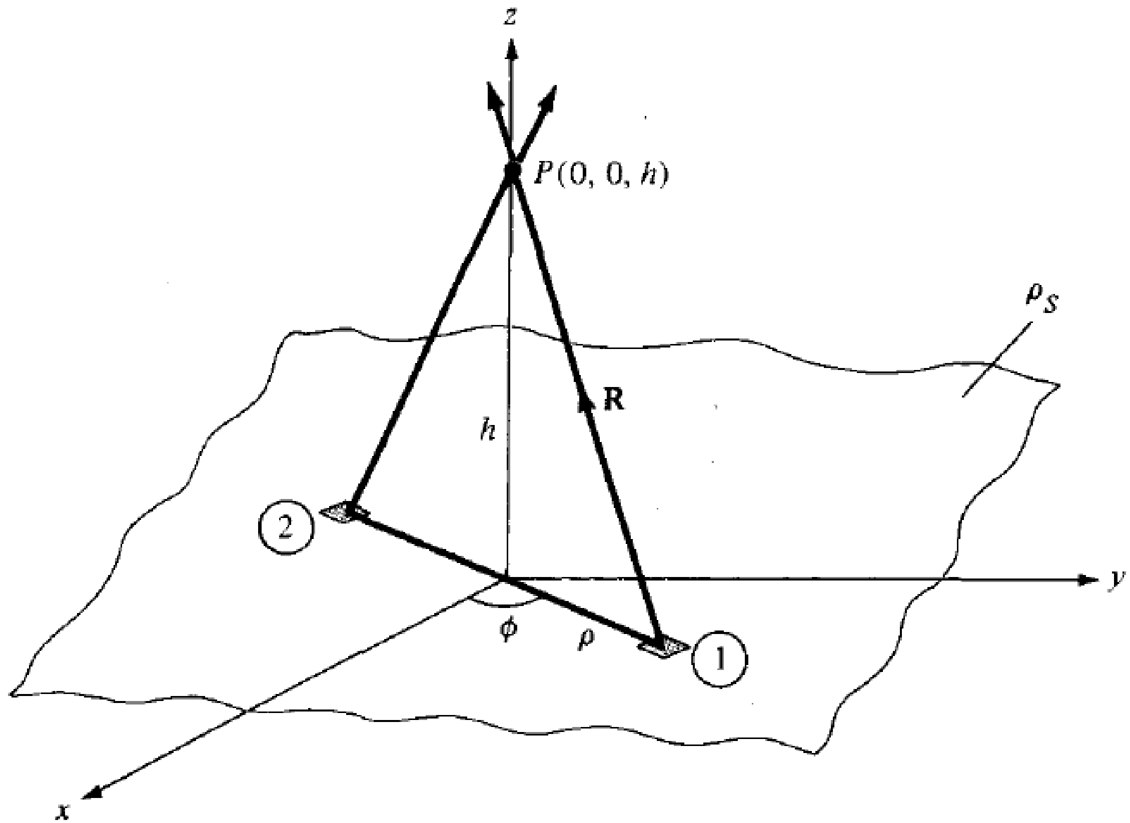
$$dQ = \rho_S\, dS$$

dan karenanya, total muatan *Q* adalah

$$Q = \int \rho_S\, dS \tag{4.22}$$

Dari persamaan (4.15), kontribusi terhadap medan **E** pada titik P(0,0,*h*) oleh elemen permukaan 1 yang ditunjukkan pada Gambar 4.5 adalah

$$d\mathbf{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_o R^2}\,\mathbf{a}_R \tag{4.23}$$



Gambar 4.5 Medan listrik **E** oleh muatan lembaran tak-terhingga

Dari Gambar 4.5, $\mathbf{R} = \rho(-\mathbf{a}_\rho) + h\mathbf{a}_z, \qquad R = |\mathbf{R}| = \left[\rho^2 + h^2\right]^{1/2}$

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{R}, \qquad dQ = \rho_S\, dS = \rho_S\, \rho\, d\phi\, d\rho$$

Substitusi ke persamaan (4.23),

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_S\, \rho\, d\phi\, d\rho \left[-\rho\mathbf{a}_\rho + h\mathbf{a}_z\right]}{4\pi\varepsilon_o\left[\rho^2 + h^2\right]^{3/2}} \tag{4.24}$$

Karena adanya simetri distribusi muatan, untuk setiap elemen 1, ada elemen 2 yang bersesuaian yang kontribusinya sepanjang $\mathbf{a}_\rho$ menghapuskan kontribusi dari elemen 1, seperti ditunjukkan pada Gambar 4.5. Jadi kontribusi terhadap E_ρ jumlah totalnya nol sehingga **E** hanya memiliki komponen-*z*. Hal ini juga dapat dibuktikan secara matematika dengan mengganti $\mathbf{a}_\rho$ dengan $\cos\phi\ \mathbf{a}_x + \sin\phi\ \mathbf{a}_y$. Integrasi $\cos\phi$ atau $\sin\phi$ dengan batas $0 < \phi < 2\pi$ hasilnya nol. Oleh karenanya,

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}_z = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_o} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\infty} \frac{h\rho\, d\rho\, d\phi}{\left[\rho^2 + h^2\right]^{3/2}}\, \mathbf{a}_z$$

$$= \frac{\rho_S h}{4\pi\varepsilon_o} 2\pi \int_0^{\infty} \left[\rho^2 + h^2\right]^{-3/2} \frac{1}{2}\, d(\rho^2)\, \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S h}{2\varepsilon_o} \left\{ -\left[\rho^2 + h^2\right]^{-1/2} \right\}_0^\infty \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_o} \mathbf{a}_z \tag{4.25}$$

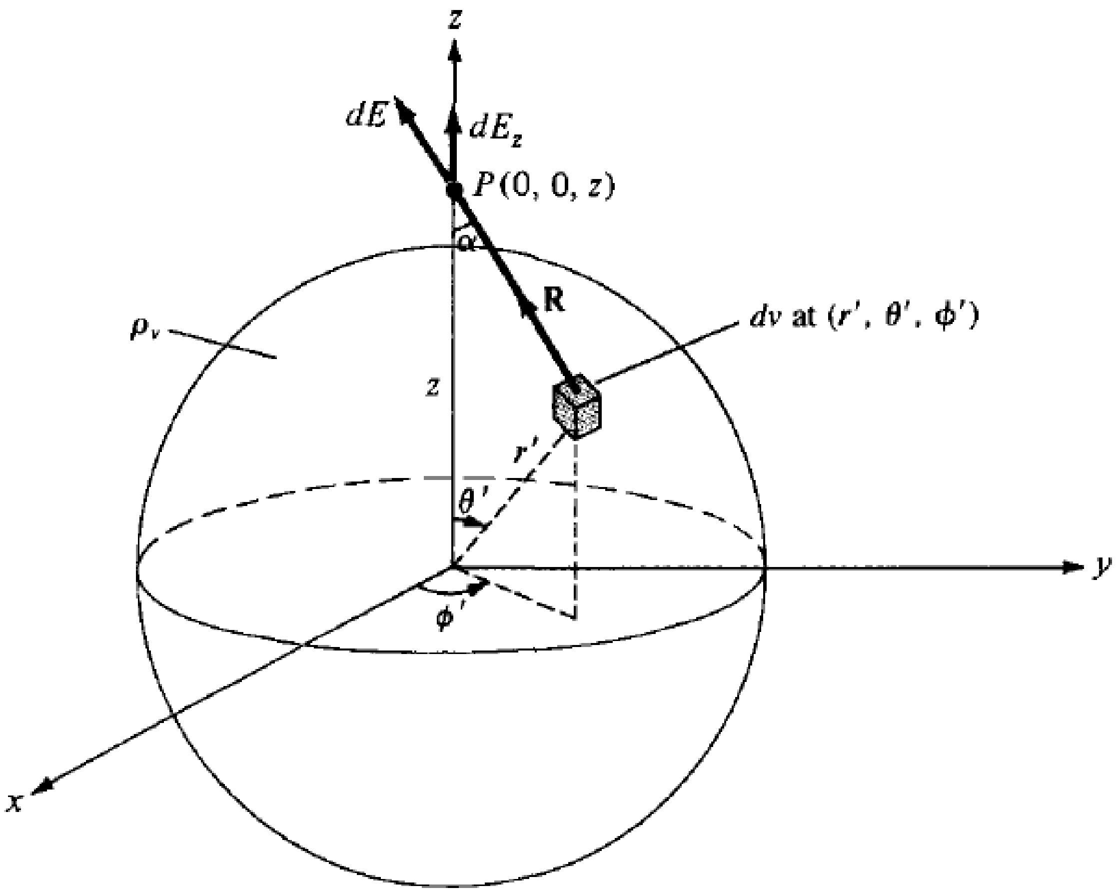
yakni, **E** hanya memiliki komponen-*z* jika muatam berada dalam bidang-*xy*. Secara umum, untuk *lembaran tak-terhingga* dari muatan

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_o} \mathbf{a}_n} \tag{4.26}$$

dimana $\mathbf{a}_n$ adalah vektor satuan normal terhadap lembaran. Dari persamaan (4.25) atau (4.26), diketahui bahwa medan listrik berarah normal (tegak lurus) terhadap lembaran dan tidak bergantung pada jarak antara lembaran dan titik pengamatan P. Dalan kapasitor keping sejajar, medan listrik yang ada di antara kedua keping dengan muatan sama tapi berlawanan tanda diberikan oleh

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_o} \mathbf{a}_n + \frac{-\rho_S}{2\varepsilon_o}(-\mathbf{a}_n) = \frac{\rho_S}{\varepsilon_o} \mathbf{a}_n \tag{4.27}$$

C. Muatan Volume



Gambar 4.6 Medan listrik **E** oleh distribusi muatan volume

Perhatikan distribusi muatan volume dengan kerapatan muatan seragam ρ_V seperti ditunjukkan oleh Gambar 4.6. Muatan *dQ* yang bersesuaian dengan elemen volume *dv* adalah

$$dQ = \rho_v \, dv$$

dan total muatan pada bola dengan jejari *a*,

$$Q = \int \rho_v \, dv = \rho_v \int dv$$

$$= \rho_v \frac{4\pi a^3}{3} \qquad (4.28)$$

Medan listrik $d\mathbf{E}$ di $P(0,0,z)$ oleh elemen muatan volume adalah

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_v \, dv}{4\pi\varepsilon_o R^2} \mathbf{a}_R$$

dimana $\mathbf{a}_R = \cos\alpha \; \mathbf{a}_z + \sin\alpha \; \mathbf{a}_\rho$. Akibat adanya simetri dari distribusi muatan, kontribusi terhadap E_x atau E_y totalnya adalah nol. Yang tersisa hanyalah kontribusi E_z, yang dapat dinyatakan oleh

$$E_z = \mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_z = \int dE \cos\alpha = \frac{\rho_v}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{dv \cos\alpha}{R^2} \tag{4.29}$$

Selanjutnya, dv, R^2 dan $\cos\alpha$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$dv = r'^2 \sin\theta' \, dr' \, d\theta' \, d\phi' \tag{4.30}$$

Dengan menerapkan aturan cosinus untuk Gambar 4.6, diperoleh

$$R^2 = z^2 + r'^2 - 2zr' \cos\theta'$$

$$r'^2 = z^2 + R^2 - 2zR \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{z^2 + R^2 - r'^2}{2zR} \tag{4.31a}$$

$$\cos\theta' = \frac{z^2 + r'^2 - R^2}{2zr'} \tag{4.31b}$$

Dengan mendiferensialkan (4.31b) terhadap θ' dan menjaga *z* dan *r'* tetap,

$$\sin\theta'\, d\theta' = \frac{R\, dR}{z\, r'} \tag{4.32}$$

Substitusi (4.30) sampai (4.32) ke (4.29) menghasilkan

$$\begin{aligned}
E_z &= \frac{\rho_v}{4\pi\varepsilon_o} \int_{\phi'=0}^{2\pi} d\phi' \int_{r'=0}^{a} \int_{R=z-r'}^{z+r'} r'^2 \frac{R\, dR}{zr'}\, dr' \frac{z^2 + R^2 - r'^2}{2zR} \frac{1}{R^2} \\
&= \frac{\rho_v 2\pi}{8\pi\varepsilon_o z^2} \int_{r'=0}^{a} \int_{R=z-r'}^{z+r'} r' \left[1 + \frac{z^2 - r'^2}{R^2}\right] dR\, dr' \\
&= \frac{\rho_v \pi}{4\pi\varepsilon_o z^2} \int_0^a r' \left[R - \frac{(z^2 - r'^2)}{R}\right]_{z-r'}^{z+r'} dr' \\
&= \frac{\rho_v \pi}{4\pi\varepsilon_o z^2} \int_0^a 4r'^2\, dr' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{1}{z^2} \left(\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_v\right)
\end{aligned}$$

atau

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o z^2}\,\mathbf{a}_z \tag{4.33}$$

Hasil ini diperoleh untuk **E** di *P(0,0,z)*. Karena adanya simetri dari distribusi muatan, medan listrik di *P*(r, θ, ϕ) dapat diperoleh dari persamaan (4.33) sebagai

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\,\mathbf{a}_r \tag{4.34}$$

yang identik dengan medan listrik di titik yang sama oleh muatan titik *Q* yang berada di titik asal atau pusat distribusi muatan bola. Alasan untuk hal ini akan lebih jelas setelah pembahasan Hukum Gauss pada bagian berikutnya.

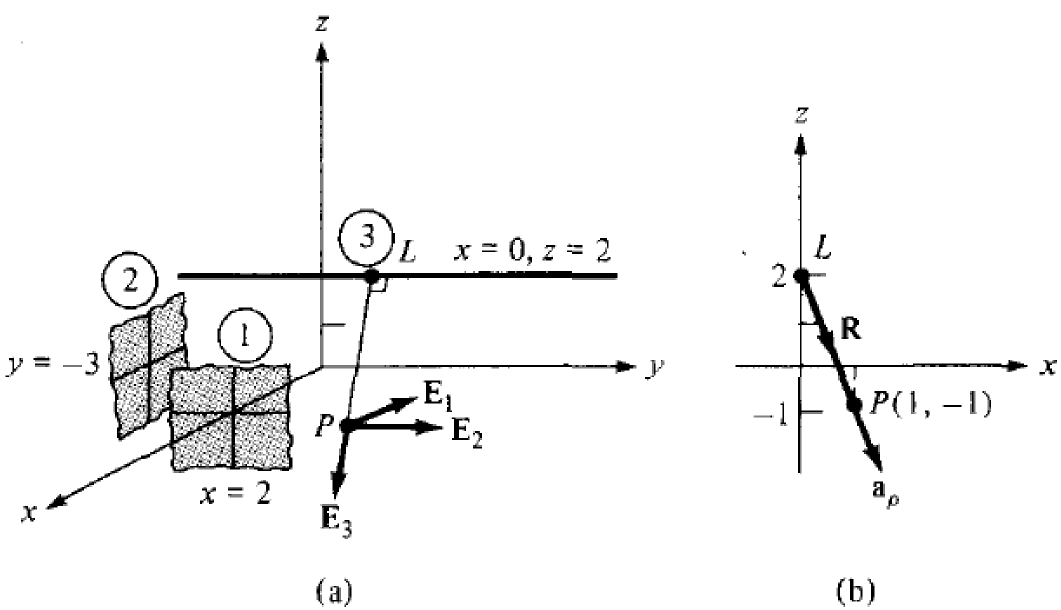
Contoh Soal 4.3

Bidang $x = 2$ dan $y = -3$, masing-masing membawa muatan 10 nC/m^2 dan 15 nC/m^2. Jika garis $x = 0, z = 2$ membawa muatan 10π nC/m, hitung **E** di (1,1,-1) oleh ketiga distribusi muatan tersebut.

Jawab:

Misalkan $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3$

dimana $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ dan $\mathbf{E}_3$ masing-masing adalah kontribusi terhadap **E** di titik (1,1,-1) oleh lembaran tak-terhingga 1, lembaran tak-terhingga 2, dan garis tak-terhingga 3 seperti ditunjukkan pada Gambar 4.7.



Gambar 4.7 Untuk contoh 4.3: (a) distribusi tiga muatan; (b) mencari ρ dan $\mathbf{a}_\rho$ pada bidang $y = 1$.

Dengan menerapkan persamaan (4.26) dan (4.21),

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\rho_{S_1}}{2\varepsilon_o}(-\mathbf{a}_x) = -\frac{10 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot \dfrac{10^{-9}}{36\pi}}\mathbf{a}_x = -180\pi\mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\rho_{S_2}}{2\varepsilon_o}\mathbf{a}_y = \frac{15 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot \dfrac{10^{-9}}{36\pi}}\mathbf{a}_y = 270\pi\,\mathbf{a}_y$$

dan $\mathbf{E}_3 = \dfrac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_o\rho}\mathbf{a}_\rho$

dimana $\mathbf{a}_\rho$ adalah vektor satuan sepanjang LP tegak lurus terhadap muatan garis dan ρ adalah panjang LP yang akan ditentukan dari Gambar 4.7(b). Gambar 4.7(b) dihasilkan dari Gambar 4.7(a) jika kita memperhatikan bidang y = 1 dimana terdapat $\mathbf{E}_3$. Dari Gambar 4.7(b), vektor jarak dari L ke P adalah

$$\mathbf{R} = -3\mathbf{a}_z + \mathbf{a}_x$$

$$\rho = |\mathbf{R}| = \sqrt{10}, \qquad \mathbf{a}_\rho = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{a}_x - \frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{a}_z$$

Oleh karenanya,

$$\mathbf{E}_3 = \frac{10\pi \cdot 10^{-9}}{2\pi \cdot \dfrac{10^{-9}}{36\pi}} \cdot \frac{1}{10}(\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z)$$
$$= 18\pi(\mathbf{a}_x - 3\mathbf{a}_z)$$

Dengan menjumlahkan $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ dan $\mathbf{E}_3$, diperoleh:

$$\mathbf{E} = -162\pi\mathbf{a}_x + 270\pi\mathbf{a}_y - 54\pi\mathbf{a}_z \text{ V/m}$$

Soal Latihan 4.3

Jika pada contoh soal 4.3, garis *x = 0, z = 2* dirotasi 90^o di titik (0,2,2) sehingga menjadi *x = 0*, *y = 2*, hitung **E** di (1,1,-1).

Jawaban:

$-282.7\mathbf{a}_x + 564.5\mathbf{a}_y$ V/m

Contoh Soal 4.4

Lembaran berhingga *$0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$* pada bidang *$z = 0$* memiliki kerapatan muatan $\rho_s = xy\,(x^2 + y^2 + 25)^{3/2}$ nC/m^2. Hitung

(a) Total muatan pada lembaran;

(b) Medan listrik di (0,0,5);

(c) Gaya yang dialami muatan -1 mC danberada di (0,0,5)

Jawab:

$$\text{(a)}\quad Q = \int \rho_S\, dS = \int_0^1 \int_0^1 xy(x^2 + y^2 + 25)^{3/2}\, dx\, dy \text{ nC}$$

Karena *$x dx$ = ½ $d(x^2)$*, integrasi di atas akan dilakukan terhadap *x^2* (atau mengubah variabel: *$x^2 = u$* sehingga *$x\, dx = du/2$*).

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} \int_0^1 y \int_0^1 (x^2 + y^2 + 25)^{3/2}\, d(x^2)\, dy \text{ nC} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 y\, \frac{2}{5} (x^2 + y^2 + 25)^{5/2} \Big|_0^1 dy \\ &= \frac{1}{5} \int_0^1 \frac{1}{2} \left[(y^2 + 26)^{5/2} - (y^2 + 25)^{5/2} \right] d(y^2) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{7} \left[(y^2 + 26)^{7/2} - (y^2 + 25)^{7/2} \right] \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{35} \left[(27)^{7/2} + (25)^{7/2} - 2(26)^{7/2} \right]$$

$$Q = 33.15 \text{ nC}$$

(b) $$\mathbf{E} = \int \frac{\rho_S \, dS \, \mathbf{a}_R}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \int \frac{\rho_S \, dS \, (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_o |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

dimana $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (0, 0, 5) - (x, y, 0) = (-x, -y, 5)$. Oleh karenanya,

$$\mathbf{E} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{10^{-9} xy(x^2 + y^2 + 25)^{3/2} (-x\mathbf{a}_x - y\mathbf{a}_y + 5\mathbf{a}_z) dx \, dy}{4\pi \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi} (x^2 + y^2 + 25)^{3/2}}$$

$$= 9 \left[-\int_0^1 x^2 \, dx \int_0^1 y \, dy \, \mathbf{a}_x - \int_0^1 x \, dx \int_0^1 y^2 dy \, \mathbf{a}_y + 5 \int_0^1 x \, dx \int_0^1 y \, dy \, \mathbf{a}_z \right]$$

$$= 9 \left(\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{5}{4} \right)$$

$$= (-1.5, -1.5, 11.25) \text{ V/m}$$

(c) $\mathbf{F} = q\mathbf{E} = (1.5, 1.5, -11.25)$ mN

Soal Latihan 4.4

Keping persegi yang dideskripsikan oleh $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$, $z = 0$ membawa muatan $12|y|$ mC/m^2. Hitung total muatan keping dan intensitas medan listrik di (0, 0, 10).

Jawaban:

192 mC, 16.46 $\mathbf{a}_z$ MV/m