4.4. KERAPATAN FLUKS LISTRIK

Misalkan **D** adalah suatu medan vektor baru yang tidak bergantung pada medium dan didefinisikan oleh

$$\boxed{\mathbf{D} = \varepsilon_o \mathbf{E}} \tag{4.35}$$

Didefinisikan *fluks listrik* ψ dalam **D** sebagai

$$\Psi = \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \tag{4.36}$$

Dalam satuan SI, satu garis fluks listrik berawal dari +1 C dan berakhir pada -1 C sehingga fluks listrik diukur dalam coulomb. Oleh karena itu medan vektor **D** disebut ***kerapatan fluks listrik*** dan diukur dalam coulomb per meter persegi. Untuk alasan historis, kerapatan fluks listrik disebut juga sebagai ***perpindahan listrik*** (*electric displacement*).

Dari persamaan (4.35) terlihat bahwa semua rumus untuk **E** yang diturunkan dari Hukum Coulomb dapat digunakan untuk menghitung **D**, yaitu dengan cara mengalikan rumus tersebut dengan ε_o.

Untuk muatan lembaran tak-terhingga, persamaan (4.26) dan (4.35) menghasilkan

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_S}{2}\,\mathbf{a}_n \tag{4.37}$$

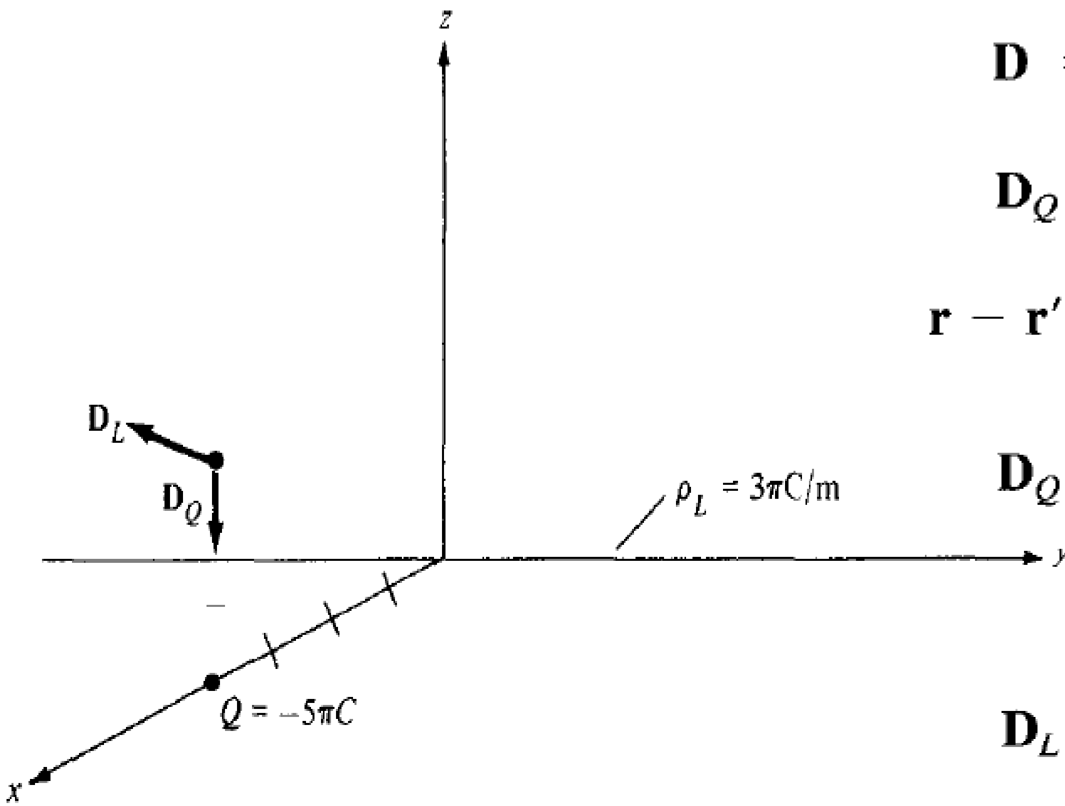
dan untuk distribusi muatan volume, persamaan (4.16) dan (4.35) memberikan

$$\mathbf{D} = \int \frac{\rho_v\,dv}{4\pi R^2}\,\mathbf{a}_R \tag{4.38}$$

Dari persamaan (4.37) dan (4.38) terlihat bahwa **D** adalah fungsi dari muatan dan posisi saja; **D** tidak bergantung kepada medium.

Contoh Soal 4.5

Tentukan **D** di (4,0,3) jika terdapat muatan titik -5π mC di (4,0,0) dan muatan garis 3π mC/m di sepanjang sumbu-y.



Gambar 4.8 Kerapatan fluks **D** oleh muatan titik dan muatan garis tak-terhingga

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_Q + \mathbf{D}_L$$

$$\mathbf{D}_Q = \varepsilon_o \mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi R^2}\,\mathbf{a}_R = \frac{Q\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (4, 0, 3) - (4, 0, 0) = (0, 0, 3)$$

$$\mathbf{D}_Q = \frac{-5\pi \cdot 10^{-3}(0, 0, 3)}{4\pi|(0, 0, 3)|^3}$$

$$= -0.138\,\mathbf{a}_z \text{ mC/m}^2$$

$$\mathbf{D}_L = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}\,\mathbf{a}_\rho$$

$$\rho = |(4, 0, 3) - (0, 0, 0)| = 5$$

$$\mathbf{a}_\rho = \frac{(4, 0, 3) - (0, 0, 0)}{|(4, 0, 3) - (0, 0, 0)|} = \frac{(4, 0, 3)}{5}$$

$$\mathbf{D}_L = \frac{3\pi}{2\pi(25)}(4\mathbf{a}_x + 3\mathbf{a}_z) = 0.24\mathbf{a}_x + 0.18\mathbf{a}_z \text{ mC/m}^2$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_Q + \mathbf{D}_L = 240\mathbf{a}_x + 42\mathbf{a}_z\ \mu\text{C/m}^2$$

Soal Latihan 4.5

Muatan titik 30 nC terletak di pusat koordinat dan bidang y = 3 membawa muatan 10 nC/m^2. Hitung **D** di (0,4,3).

Jawaban:

$5.076\mathbf{a}_y + 0.0573\mathbf{a}_z \text{ nC/m}^2$

4.5. HUKUM GAUSS – PERSAMAAN MAXWELL

Hukum Gauss merupakan salah satu hukum dasar elektromagnetisme.

Hukum Gauss menyatakan bahwa total fluks listrik ψ yang melalui suatu permukaan tertutup adalah sama dengan total muatan yang terlingkupi oleh permukaan tersebut.

Jadi,

$$\Psi = Q_{\text{enc}} \tag{4.39}$$

yakni,

$$\Psi = \oint d\Psi = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

= total muatan yang terlingkupi $Q = \int \rho_v \, dv$ (4.40) atau

$$\boxed{Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \rho_v \, dv} \tag{4.41}$$

Dengan menerapkan teorema divergensi pada bagian tengah persamaan (4.41)

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_v \nabla \cdot \mathbf{D} \, dv \tag{4.42}$$

Dengan membandingkan integral volume persamaan (4.41) dengan (4.42), diperoleh

$$\boxed{\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D}} \tag{4.43}$$

dimana ini merupakan persamaan pertama dari empat *persamaan Maxwell*. Persamaan (4.43) menyatakan bahwa kerapatan muatan volume adalah sama dengan divergensi kerapatan fluks listrik.

Catatan:

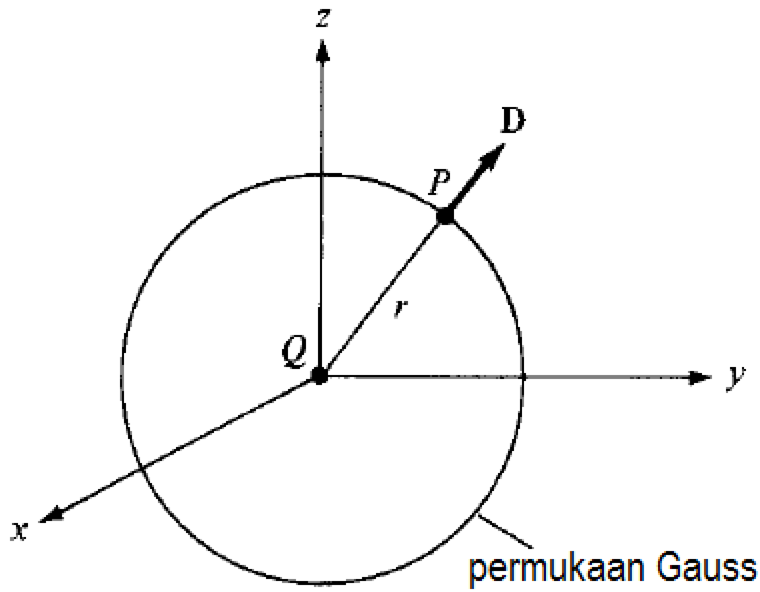
1. Persamaan (4.41) dan (4.43) pada dasarnya menyatakan hukum Gauss dalam cara yang berbeda; pers. (4.41) adalah bentuk integral, sedangkan pers. (4.43) adalah bentuk diferensial atau bentuk titik dari hukum Gauss.
2. Hukum Gauss adalah pernyataan alternatif dari hukum Coulomb; penerapan yang tepat dari teorema divergensi terhadap hukum Coulomb menghasilkan hukum Gauss.
3. Hukum Gauss memberikan kemudahan dalam mencari **E** atau **D** untuk distribusi muatan yang simetris seperti muatan titik, muatan garis tak-terhingga, muatan permukaan silinder tak-terhingga dan muatan yang terdistribusi dengan bentuk bola. Distribusi muatan kontinyu memiliki simetri persegi jika distribusi tersebut hanya berantung pada x (atau y atau z), simetri silinder jika hanya bergantung pada ρ, atau simetri bola jika hanya bergantung pada r (tidak bergantung pada θ atau ϕ). Perlu ditekankan di sini bahwa apakah distribusi muatan simetris atau tidak, hukum Gauss tetap berlaku.

4.6. PENERAPAN HUKUM GAUSS

Prosedur penerapan hukum Gauss untuk menghitung medan listrik melibatkan pengetahuan tentang apakah ada simetri distribusi muatan atau tidak. Apabila simetri distribusi muatan ada, selanjutnya adalah membentuk permukaan tertutup matematika (dikenal sebagai permukaan Gauss). Permukaan Gauss dipilih sehingga **D** tegak lurus (*normal*) atau menyinggung (*tangential*) terhadap permukaan Gauss. Bila **D** tegak lurus permukaan, **D . dS** = *D ds* karena D tetap di permukaan ini. Bila **D** menyinggung (tangensial) permukaan , **D . dS** = 0 . Jadi kita harus memilih permukaan sehingga diperoleh simetri dari distribusi muatan.

A. Muatan Titik

Misalkan terdapat muatan titik *Q* di titik asal. Untuk menentukan **D** di titik *P*, dengan mudah terlihat bahwa memilih permukaan bola yang mengandung *P* akan memenuhi kondisi simetri. Jadi, permukaan bola yang berpusat di titik asal merupakan permukaan Gauss dalam kasus ini dan ditunjukkan pada Gambar 4.9.



Gambar 4.9 Permukaan Gauss untuk muatan titik

Karena **D** dimana-mana tegak lurus terhadap permukaan Gauss, yakni, $\mathbf{D} = D_r\,\mathbf{a}_r$, maka dengan menerapkan hukum Gauss (ψ = muatan yang terlingkupi, $Q_{enclose}$), diperoleh

$$Q = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r \oint dS = D_r\, 4\pi r^2 \tag{4.44}$$

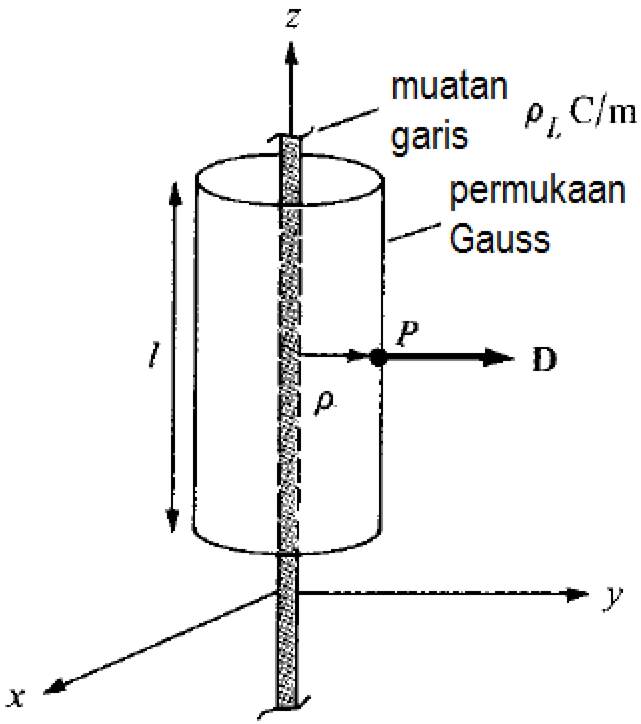
dimana

$$\oint dS = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = 4\pi r^2$$

merupakan luas area permukaan Gauss. Jadi,

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\,\mathbf{a}_r \tag{4.45}$$

B. Muatan Garis Tak-Terhingga



Gambar 4.10 Permukaan Gauss untuk muatan garis tak terhingga

Misalkan terdapat muatan garis tak-terhingga dengan kerapatan muatan seragam ρ_L C/m terletak di sepanjang sumbu-z. Untuk menentukan **D** di titik *P*, dipilih permukaan silinder yang mengandung *P untuk* memenuhi kondisi simetri seperti ditunjukkan pada Gambar 4.10. **D** konstan pada dan tegak lurus terhadap permukaan Gauss silinder; yakni $\mathbf{D} = D_\rho\, \boldsymbol{a}_\rho$. Jika diterapkan hukum Gauss pada sembarang panjang ℓ dari garis,

$$\rho_L \ell = Q = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_\rho \oint dS$$

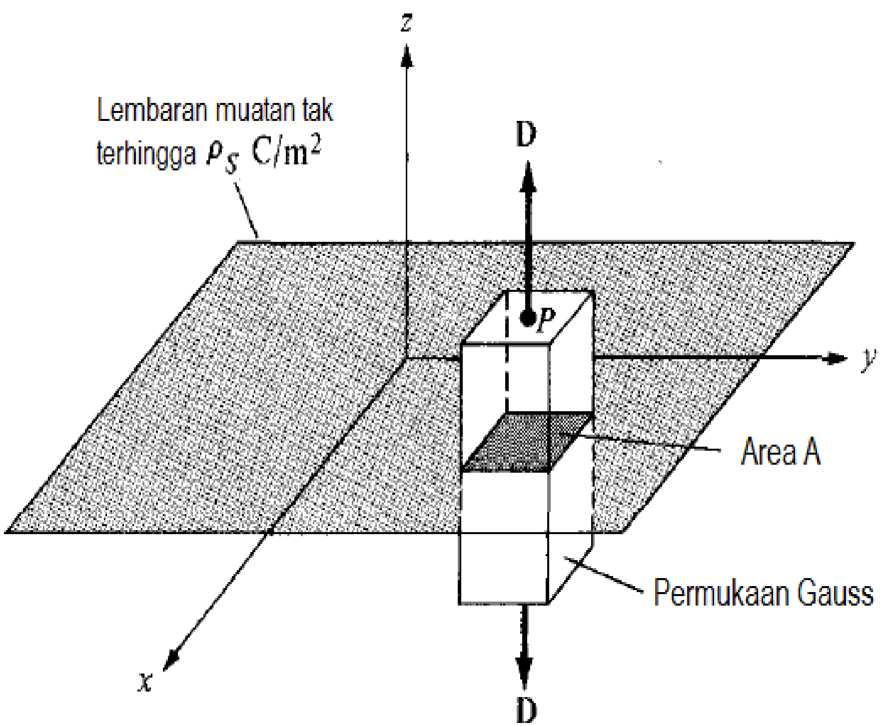
$$= D_\rho\, 2\pi\rho\ell \qquad (4.46)$$

dimana $\oint dS = 2\pi\rho\ell$ adalah luas permukaan Gauss.

$\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ pada permukaan atas dan bawah silinder adalah nol karena **D** tidak memiliki komponen di arah-*z*, dan dalam hal ini **D** menyinggung permukaan tersebut. Jadi,

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_L}{2\pi\rho}\mathbf{a}_\rho \tag{4.47}$$

C. Lembaran Muatan Tak-Terhingga



Gambar 4.11 Permukaan Gauss untuk lembaran muatan tak terhingga

Perhatikan lembaran tak-terhingga dari muatan seragam ρ_S C/m^2 yang terletak pada bidang z = 0. Untuk menentukan **D** di titik *P*, dipilih kotak segi-empat yang dipotong secara simetris oleh lembaran muatan dan memiliki dua permukaan sejajar seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.11. Karena **D** tegak lurus lembaran, maka $\mathbf{D} = D_z\, \boldsymbol{a}_z$, dan jika diterapkan hukum Gauss diperoleh:

$$\rho_S \int dS = Q = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_z \left[\int_{\text{atas}} dS + \int_{\text{bawah}} dS \right] \tag{4.48}$$

Perhatikan bahwa **D**.d**S** pada sisi samping kotak adalah nol karena **D** tidak memiliki komponen sepanjang $\mathbf{a}_x$ dan $\mathbf{a}_y$. Jika area atas dan bawah dari kotak masing-masing memiliki luas *A*, persamaan (4.48) menjadi

$$\rho_S A = D_z (A + A) \tag{4.49}$$

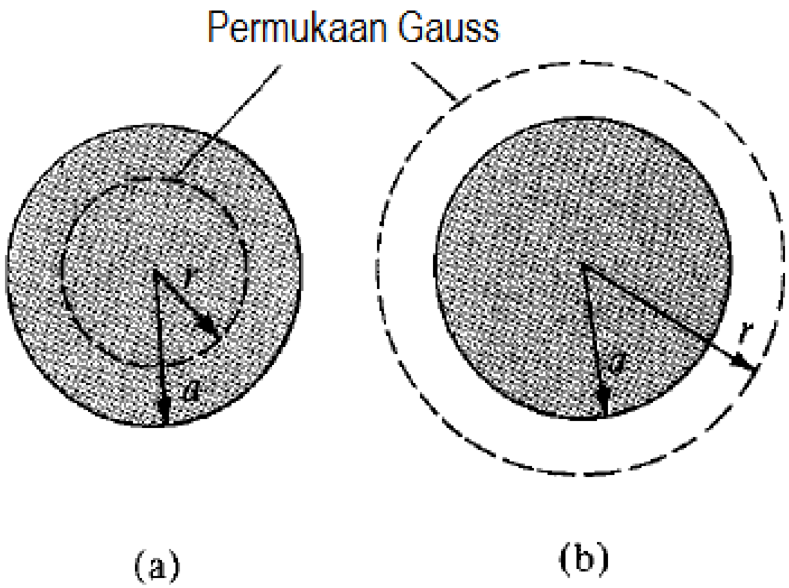
dan dengan begitu

$$\mathbf{D} = \frac{\rho_S}{2} \mathbf{a}_z$$

atau

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_o} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_o} \mathbf{a}_z \tag{4.50}$$

D. Bola Bermuatan Seragam



Gambar 4.12 Permukaan Gauss untuk bola bermuatan seragam, dengan (a) $r \leq a$ dan (b) $r \geq a$

Perhatikan bola dengan jejari *a* dan kerapatan muatan seragam ρ_v C/m^3. Untuk menentukan **D** di setiap titik, akan dibangun permukaan Gauss untuk $r \leq a$ dan $r \geq a$ secara terpisah. Karena muatan memiliki simetri bola, sangat jelas bahwa permukaan bola merupakan permukaan Gauss yang sesuai.

Untuk $r \leq a$, total muatan yang terlingkupi oleh permukaan bola berjejari *r*, seperti ditunjukkan oleh Gambar 4.12 (a),

$$Q_{enc} = \int \rho_v \, dv = \rho_v \int dv = \rho_v \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{r} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi \qquad (4.51)$$

$$= \rho_v \frac{4}{3} \pi r^3$$

dan $$\Psi = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r \oint dS = D_r \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= D_r \, 4\pi r^2 \tag{4.52}$$

Oleh karenanya, $\Psi = Q_{\text{enc}}$ memberikan

$$D_r \, 4\pi r^2 = \frac{4\pi r^3}{3} \rho_v$$

dan $$\mathbf{D} = \frac{r}{3} \rho_v \, \mathbf{a}_r \qquad 0 < r \leqslant a \tag{4.53}$$

Untuk r ≥ *a*, permukaan Gauss ditunjukkan pada Gambar 4.16(b). Muatan yang terlingkupi oleh permukaan pada kasus ini adalah seluruh muatan, yakni

$$Q_{\text{enc}} = \int \rho_v \, dv = \rho_v \int dv = \rho_v \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{a} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$= \rho_v \frac{4}{3} \pi a^3 \tag{4.54}$$

sedangkan $$\Psi = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_r \, 4\pi r^2 \tag{4.55}$$

Seperti halnya dalam persamaan (4.52). Oleh karenanya,

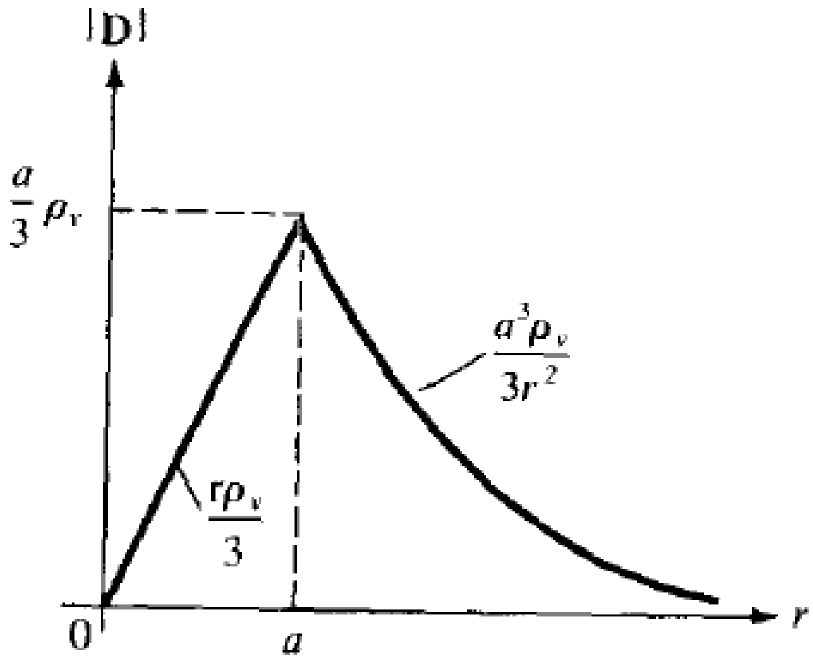
$$D_r \, 4\pi r^2 = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_v$$

atau $$\mathbf{D} = \frac{a^3}{3r^2} \rho_v \mathbf{a}_r \qquad r \geqslant a \tag{4.56}$$

Jadi ,dari persamaan (4.53) dan (4.56), **D** di setiap titik diberikan oleh

$$\mathbf{D} = \begin{cases} \dfrac{r}{3} \rho_v \, \mathbf{a}_r & 0 < r \leqslant a \\ \dfrac{a^3}{3r^2} \rho_v \, \mathbf{a}_r & r \geqslant a \end{cases} \tag{4.57}$$

dan |**D**| ditunjukkan pada Gambar 4.13.



Gambar 4.13 Sketsa $|\mathbf{D}|$ terhadap r untuk bola bermuatan seragam

Contoh Soal 4.6

Jika diketahui $\mathbf{D} = z\,\rho\cos^2\phi\,\mathbf{a}_z$ C/m^2, hitung kerapatan muatan di $(1, \pi/4, 3)$ dan total muatan yang terlingkupi oleh silinder dengan jejari 1 m dengan $-2 \le z \le 2$ m.

Jawab:

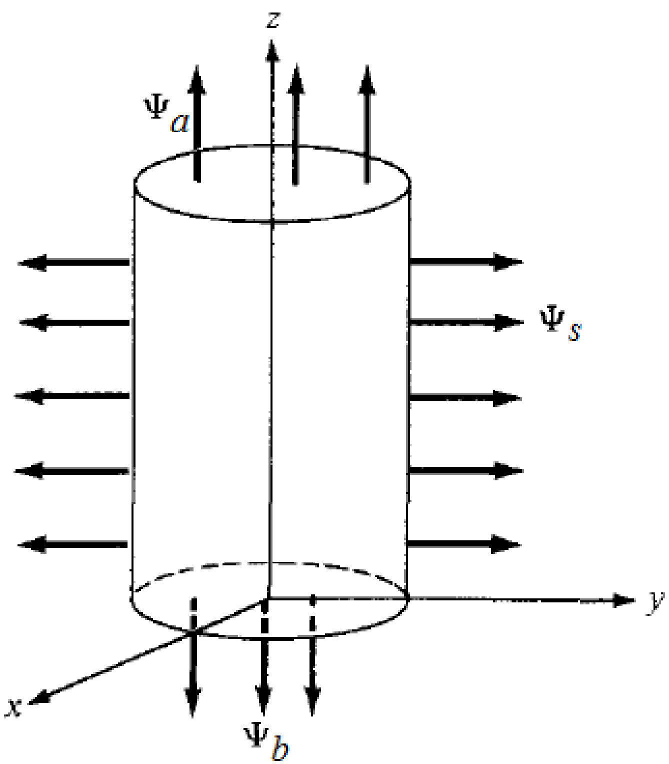
$$\rho_v = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho\cos^2\phi$$

di $(1, \pi/4, 3)$, $\rho_v = 1 \,.\, \cos^2(\pi/4) = 0{,}5$ C/m^3. Total muatan yang terlingkupi oleh silinder dapat dicari dengan dua cara.

Metode 1: Metode ini didasarkan langsung pada definisi dari total muatan volume.

$$\begin{aligned} Q &= \int_v \rho_v\,dv = \int_v \rho\cos^2\phi\,\rho\,d\phi\,d\rho\,dz \\ &= \int_{z=-2}^{2} dz \int_{\phi=0}^{2\pi} \cos^2\phi\,d\phi \int_{\rho=0}^{1} \rho^2\,d\rho = 4(\pi)(1/3) \\ &= \frac{4\pi}{3}\,\mathrm{C} \end{aligned}$$

Metode 2: Alternatif lain, dapat menggunakan Hukum Gauss.



$$Q = \Psi = \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \left[\int_s + \int_a + \int_b \right] \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

$$= \Psi_s + \Psi_a + \Psi_b$$

dimana ψ_s, ψ_a, dan ψ_b masing-masing adalah fluks yang melalui permukaan samping, atas dan bawah dari silinder (lihat gambar). Karena **D** tidak memiliki komponen sepanjang $\mathbf{a}_\rho$, ψ_s = 0, dan untuk ψ_a, d**S** = ρ dϕ dρ $\mathbf{a}_z$, sehingga

$$\Psi_a = \int_{\rho=0}^{1} \int_{\phi=0}^{2\pi} z\rho \cos^2 \phi \; \rho \, d\phi \, d\rho \, \bigg|_{z=2}$$

$$= 2 \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \, d\phi$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}\right)\pi = \frac{2\pi}{3}$$

dan untuk ψ_b, d**S** = $-\rho\, d\phi\, d\rho\, \mathbf{a}_z$, sehingga

$$\Psi_b = -\int_{\rho=0}^{1}\int_{\phi=0}^{2\pi} z\rho\cos^2\phi\,\rho\,d\phi\,d\rho\,\Big|_{z=-2} = 2\int_0^1 \rho^2\,d\rho\int_0^{2\pi}\cos^2\phi\,d\phi$$
$$= \frac{2\pi}{3}$$

Jadi, $Q = \Psi = 0 + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\,\mathrm{C}$

Soal Latihan 4.6

Jika **D** = $(2y^2 + z)\,\mathbf{a}_x + 4xy\,\mathbf{a}_y + x\,\mathbf{a}_z$ C/m^2, hitung

(a) Kerapatan muatan volume di (-1,0,3)

(b) Total fluks yang melalui kubus yang didefinisikan oleh $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$

(c) Total muatan yang terlingkupi oleh kubus

Jawaban:

(a) -4 C/m^3, (b) 2 C, (c) 2 C

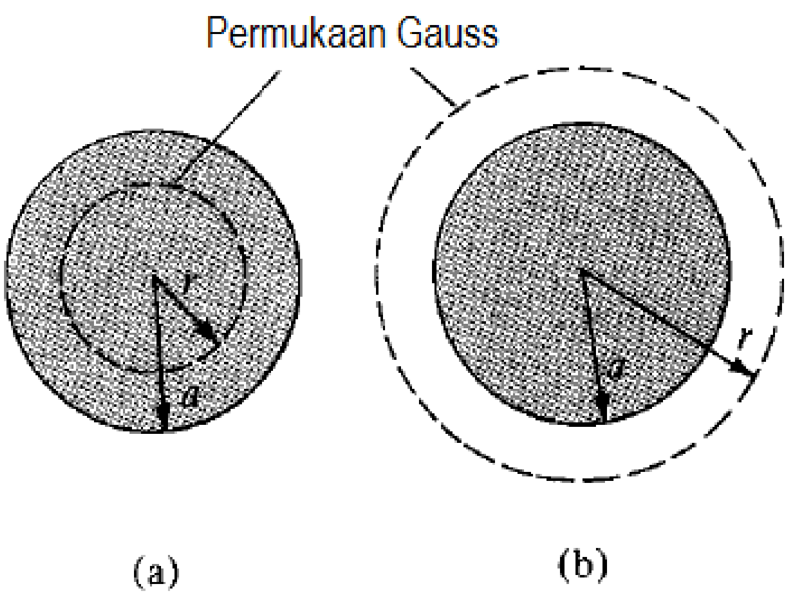
Contoh Soal 4.7

Distribusi muatan dengan simetri bola memiliki kerapatan,

$$\rho_v = \begin{cases} \dfrac{\rho_o r}{R}, & 0 \leq r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

Tentukan **E** di setiap titik.

Jawab:



Distribusi muatan dapat diilustrasikan seperti gambar di samping. Karena terdapat simetri, maka Hukum Gauss dapat diterapkan untuk mencari **E**.

$$\varepsilon_o \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{enc}} = \int \rho_v \, dv$$

(a) Untuk r < R,

$$\varepsilon_o E_r \, 4\pi r^2 = Q_{enc} = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_v \, r^2 \sin\theta \, d\phi \, d\theta \, dr$$

$$= \int_0^r 4\pi r^2 \frac{\rho_o r}{R} \, dr = \frac{\rho_o \pi r^4}{R}$$

atau $\mathbf{E} = \dfrac{\rho_o r^2}{4\varepsilon_o R} \, \mathbf{a}_r$

(b) Untuk r ≥ R, $\varepsilon_o E_r 4\pi r^2 = Q_{enc} = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_v r^2 \sin\theta \, d\phi \, d\theta \, dr$

$$= \int_0^R \frac{\rho_o r}{R} 4\pi r^2 \, dr + \int_R^r 0 \cdot 4\pi r^2 \, dr$$

$$= \pi \rho_o R^3$$

atau $\mathbf{E} = \dfrac{\rho_o R^3}{4\varepsilon_o r^2} \, \mathbf{a}_r$

Soal Latihan 4.7

Distribusi muatan di ruang bebas memiliki $\rho_v = 2r$ nC/m^3 untuk $0 \leq r \leq 10$ m dan di tempat lainnya. Tentukan **E** di r = 2m dan r = 12m.

Jawaban:

$226\mathbf{a}_r$ V/m, $3.927\mathbf{a}_r$ kV/m