BAB III

PERSAMAAN DIFFERENSIAL ORDO DUA

Tujuan Pembelajaran

Pembelajaran lebih lanjut mengenai PD adalah penyelesaian PD pada ordo dua dan ordo tinggi. Meskipun ada beberapa PD ordo dua yang dapat diselesaikan dengan menggunakan metode penyelesaian ordo satu, tetapi PD ordo dua memiliki metode khusus dalam penyelesaiannya. Terutama PD Linier yang homogen. Oleh karena itu diharapkan mahasiswa dapat mengetahui dan memahami karakteristik dari PD Linier ordo dua, agar ia memiliki kemampuan untuk mengerjakan soal-soal yang disediakan pada setiap sub bahasan pada bab 3. ini. Penyelesaian dapat menggunakan metode variasi parameter, metode integral langsung, dan metode duplikasi variabel f(x), untuk jawaban integral khusus, demikian juga untuk PD Koefisien Variabel atau PD Cauchy – Euler.

A. Persamaan Differensial Ordo Dua dengan Metode Penyelesaian Ordo Satu

Persamaan differensial ordo dua dapat dinyatakan dalam bentuk

$$f\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0 .....(1)$$

Beberapa jenis persamaan differensial ordo dua dapat di ubah menjadi persamaan ordo satu dengan pendekatan, substitusi variabel lain (pemisalan).

1. Merubah Variabel Terikat

Bila y dieliminasikan dari persamaan, maka persamaan ordo dua menjadi:

$$f\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, x\right) = 0 .....(2)$$

Persamaan ini dapat diubah menjadi ordo satu dengan mensubstitusikan.

$$p = \frac{dy}{dx} \text{ dan } \frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Sehingga menjadi $f\left(\frac{dp}{dx}, p, x\right) = 0$.....(3)

Yang merupakan PD ordo satu dengan variabel terikat p dan variabel bebas x. Bila p = h (x, c) merupakan jawaban umum dari (3) atau setara dengan dy = h (x, c) dx hasil integralnya adalah:

$$y = \int h(x,c)dx + C_2 \text{.....(4)}$$

merupakan jawaban umum dari persamaan (2).

Contoh :

Selesaikan $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = e^{2x}$

Jawab

Ambil $p = \frac{dy}{dx}$ dan $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$, persamaan menjadi :

$$\frac{dp}{dx} - 2p = e^{2x} \text{ (ordo satu linier)}$$

$$\overline{} \; x\,e^{-2x} \text{ (faktor integrasi)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(p.e^{-2x}\right) = e^0 \, dx$$

$$\text{Hasil integral } p.e^{-2x} = \int dx + C_1$$

$$= x + C_1$$

$$p = x.e^{2x} + C_1.e^{2x}$$

$$\text{subsitusikan } p = \frac{dy}{dx}$$

$$dy = \left(x.e^{3x} + C_1.e^{2x}\right)dx$$

$$y = \int x.e^{2x}dx + C_1\int e^{2x}\,dx + C_2$$

$$y = \tfrac{1}{4}e^{2x}\left(2x - 1 + 2C_1\right) + C_2$$

Hasil ini merupakan jawaban PD ordo dua yang diberikan di atas.

2. Tanpa Variabel Bebas

Bila varaiabel bebas x ditiadakan dari (1), PD ordo dua menjadi:

$$f\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, y\right) = 0\text{.....(5)}$$

substitusikan: $\frac{dy}{dx} = p \to \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy} . \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$

persamaan (5) menjadi: $f\left(p\frac{dp}{dy}, p, y\right) = 0 .....(6)$

Ini adalah persamaan ordo satu dengan p sebagai variabel terikat dan y sebagai variabel bebas. Bila jawaban umumnya adalah p = h (y, c) maka dapat ditulis:

$$dx = \frac{1}{h(y,c)}dy$$

bila h (y, c) $\neq$ 0, maka hasil integralnya adalah $x = \int \frac{1}{h(y,c_1)}dy + C_2$ sebagai jawaban untuk persamaan (5).

Contoh :

Tentukan jawaban $y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

Jawab

Ambil $\frac{dy}{dx} + p$ dan $\frac{d^2y}{dx^2} = p \frac{dp}{dy}$

Persamaan menjadi:

$$y . p\frac{dp}{dy} + 2p^2 = 0$$

$$ydp + 2pdy = 0$$

Eliminasi p dari persamaan dan selesaikan ydp + 2p dy = 0 yang merupakan PD dengan variabel terpisah

$$\frac{dp}{p} + 2\frac{dy}{y} = 0$$

Diasumsikan: ln p + ln y^2 = ln C_1

p . y = C_1

Selanjutnya substitusikan $p = \frac{dy}{dx}$ didapat persamaan:

$$y^2 \, dy = C_1 \, dx$$

Selanjutnya didapat jawaban umum

$$\tfrac{1}{3}y^3 - C_1x = C_2 = 0$$

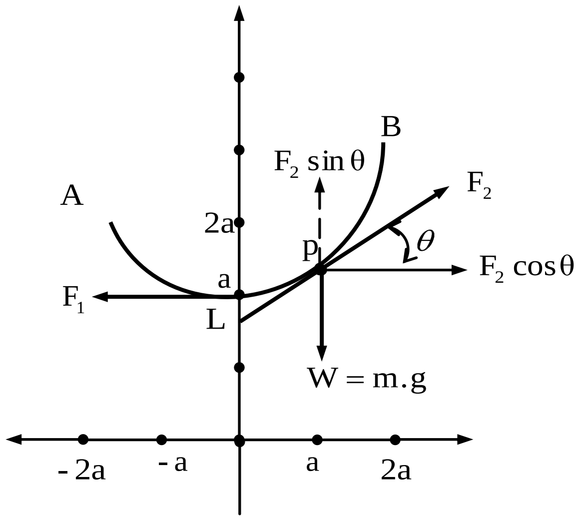
$$y^3 - 3C_1x - 3C_2 = 0$$

Bila diambil p = 0, maka jawaban umumnya adalah $\frac{dy}{dx} = 0$ dan $y = C_3$

Jawaban ini akan sama dengan jawaban diatas apabila $C_1 = 0$ dan $C_2 = \tfrac{1}{3}C_2{}^3$. Jadi : $y^3 - 3x\ C_1\ x - 3\ C_2 = 0$ adalah solusi yang dicari.

Contoh praktis :

Bentuk lengkungan kabel dengan beban merata, tergantung pada dua tiang dengan asumsi bentuk kurva yang melengkung seperti gambar. Tentukanlah persamaan lengkungannya.



Gbr : 3.1 Kurva Lengkungan kabel

Nyatakanlah L sebagai titik terendah dari lengkungan dan ambil p titik sembarang pada kabel. Gambarkan sumbu vertikal melalui titik L, untuk menggambarkan posisi titik pangkal ke L.

Perhatikan potongan LP dari kabel yang mengandung tiga jenis gaya, yaitu F_1 pada L, yang merupakan titik singgung pada kurva (arahnya mendatar). Gaya F_2 pada titik p yang tegak lurus dengan kurva di titik p dan gaya ke bawah W.S, sebagai akibat dari berat kabel sepanjang LP. Dimana W adalah berat merata tiap satuan panjang dari kabel dan S panjang dari potongan LP

Gaya F_1 dan F_2 menghasilkan tegangan pada kabel. F_1 konstan dan F_2 merupakan fungsi dari x untuk P sebagai titik sembarang pada kabel. Karena potongan LP seimbang, hukum mekanika menyatakan bahwa jumlah gaya horizontalnya sama dengan nol (0) dan jumlah gaya vertikalnya juga nol (0).

Selanjutnya bila θ menyatakan sudut tanjakan di F_2, maka berlaku

$$F_1 + F_2 .\cos\theta = 0.....(9)$$
$$W.S + F_2 \sin\theta = 0.....(10)$$

dari kedua persamaan didapat : $\tan\theta = \frac{W.S}{F_1}$

bila persamaan lengkungan dinyatakan oleh y = f(x) maka $\tan\theta = \frac{dy}{dx}$, persamaan menjadi :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S}{a}$$

dimana a = $\frac{F_2}{W}$ konstan

Differensial dari persamaan kearah x menghasilkan

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}.\frac{ds}{dx}$$

tetapi $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, panjang lengkungan

sehingga $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

Persamaan ini merupakan PD ordo dua, tanpa variabel terikat, jadi dapat diubah ke bentuk PD ordo satu dengan mengambil

$$p = \frac{dy}{dx} \text{ dan } \frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

persamaan menjadi:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a}\sqrt{1+p^2}$$

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{a}dx$$

Hasil integralnya:

$$\sinh^{-1} p = \frac{x}{a}$$

$$\text{substitusi} \qquad p = \frac{dy}{dx}$$

$$\sinh^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{x}{a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sinh^{-1}\frac{x}{a}$$

$$dy = \left(\sinh^{-1}\frac{x}{a}\right)dx$$

$$y = a\,.\cosh\frac{x}{a} + C_2$$

Bila diambil titik pangkal a satuan di bawah titik L, maka y = a bila x = 0 didapat C_2 = 0. karena cosh 0 = 1.

Dengan demikian persamaan lengkungan kabel adalah:

$$y = a\,.\cosh\frac{x}{a}$$

B. Soal

1. $\frac{d^2s}{dt^2} = g$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = x$
3. $\frac{d^2y}{dx^2} = a^2 g$
4. $\frac{d^2y}{dx^2} = g$
5. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = e^x$
6. $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 g = 0$
7. $y' \rightarrow y\,y' = 0$
8. $y\frac{d^2y}{dx^2} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$
9. $\frac{d^3y}{dx^3} = x\,e^x$
10. $\frac{d^2s}{dt^2} + a^2 g = 0$

C. Persamaan Linier Ordo Lainnya

Pada ordo ke n dinyatakan linier apabila bentuk polynomnya berderajat satu untuk variabel terikat dan turunannya.

Bentuknya adalah $\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = f(x)$.

Dimana, pada umumnya a_1 merupakan fungsi dari x sebagai contoh, persamaan;

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 2 \frac{d^2 y}{dx^{21}} + (x - 6)\, y = \sin 3x$$

adalah linier, tetapi persamaan

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - x^3 y \frac{dy}{dx} + 7\, y = 0$$

bukan linier, karena derajat dari bentuk $x^3 y \frac{dy}{dx}$ dalam variabel y dan $\frac{dy}{dx}$ adalah 2 (jumlah dari eksponen y dan $\frac{dy}{dx}$).

Pembahasan hanya pada persamaan linier dan koefisien a_i sebagai konstanta. Apabila f(x) = 0 yang ada pada persamaan di atas, maka persamaan itu dinyatakan PDL homogen (dalam y, y', y''…y^n). Bila f(x) $\neq$ 0, persamaan linier dinyatakan sebagai PDL tidak homogen.

D. PDL Berkoefisien Konstanta

Persamaan linier homogen dengan koefisien konstanta ditulis dalam bentuk:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0 .....(1)$$

dimana a_i sebagai konstanta.

Bila $y_1$dan y_2 merupakan jawaban khusus dari (1), maka $c_1\, y_1 + c_2\, y_2$ juga merupakan jawaban dari (1), dengan c_1 dan c_2 sebagai konstanta sembarang untuk:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \ldots.. + a_{n-1} \frac{dy_1}{dx} + a_n y_1 = 0$$

dan $$\frac{d^n y_2}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} + \ldots.. + a_{n-1} \frac{dy_2}{dx} + a_n y_2 = 0$$

yang dinyatakan dalam x karena y_1 dan y_2 telah diinisialkan sebagai jawaban (1) selanjutnya:

$$c_1 \left[\frac{d^n y_1}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy_1}{dx} + a_n y_1 \right] + c_2 \left[\frac{d^n y_2}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy_2}{dx} + a_n y_2 \right] = 0$$

juga dinyatakan dalam x. Bentuk ini dapat ditulis:

$$\frac{d^n}{dx^n} (c_1 y_1 + c_2 y_2) + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} (c_1 y_1 + c_2 y_2) + \ldots.. + a_n (c_1 y_1 + c_2 y_2) = 0$$

karena $c_1 y_1 + c_2 y_2$ adalah jawaban (1).

Ambil D sebagai operator differensial kearah x kemudian D_y merupakan pernyataan untuk $\frac{dy}{dx}$ dan $D^2 y = D(D_y) = \frac{d^2 y}{dx^2}$ dan secara umum:

$$D^n y = \frac{d^n y}{dx^n}$$

merupakan notasi untuk turunan ke n, dengan n bilangan bulat positif.

Polynom dalam bentuk operator differensial D adalah:

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots.. + a_{n-1} D + a_n) y = 0$$

yang menyatakan operator differensial linier, yang artinya:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots.. + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

Contoh :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + e^x \frac{dy}{dx} + y \sin x = 0$$

Dapat ditulis: $(D^2 + e^x D + \sin x) y = 0$

Ambil $A = D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots.. + a_n$ dan

$B = D^m + b_1 D^{m-1} + \ldots.. + b_m$

Merupakan operator linier.

Diperoleh jumlah dari operator linier A dan B adalah: (A+B)y = Ay + By
dan hasil kali dari A dan B adalah (AB)y = A(By)

Terlihat bahwa operator linier sama persis dengan hukum-hukum penjumlahan, perkalian, dan pemaktoran dalam aljabar demikian juga dalam ordo polynom. Artinya, operasi operator D, mengikuti kaidah aljabar.
Sebagai contoh:

$$
\begin{aligned}
\left(D^2 - 2D - 3\right)y &= (D - 3)(D + 1)y \\
&= D\left[(D + 1)y\right] - 3\left[(D + 1)y\right] \\
&= D\left(D_y + y\right) - 3\left(D_y + y\right) \\
&= D^2y - C - 3D_y - 3y \\
&= D^2y - 2Dy - 3y \\
&= \left(D^2 - 2D - 3\right)y
\end{aligned}
$$

Dengan demikian dapat ditulis,

$$D^2 - 2D - 3 = (D - 3)(D + 1)$$

merupakan operator persamaan differensial dalam bentuk polynom yang dinyatakan dalam bentuk faktor-faktornya. Selanjutnya metode ini akan digunakan untuk mencari jawaban dari PDL ordo kedua dan ordo-ordo lainnya dengan koefisien konstan.

E. Operator Differensial dan Integral

Secara umum penulisan turunan suatu fungsi adalah $\frac{dy}{dx}$,

atau $\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)$. Misalnya $\frac{d}{dx}$ (x^n) = n x^{n-1} atau $\frac{d}{dx}$ (sin x) = cos x dan sebagainya.

Dalam hal ini, simbol $\frac{d}{dx}$, bukan merupakan variabel dan juga tidak memiliki harga numerik dan tidak dapat berdiri sendiri. Simbol tersebut sekedar menyatakan suatu proses atau operasi penentuan nilai turunan suatu fungsi yang diproses oleh simbol tersebut. Karena itu simbol tersebut dapat dinyatakan sebagai operator. Demikian juga dengan $\left(\frac{d}{dx}\right)^2$ yang biasa ditulis dalam bentuk $\frac{d^2}{dx^2}$ untuk menyatakan turunan kedua suatu fungsi.

Selanjutnya $\left(\frac{d}{dx}\right)^n$ untuk $\frac{d^n}{dx^n}$ sebagai turunan ke n suatu fungsi. Untuk mempermudah penulisan operator tersebut digunakan simbol D sebagai operasi turunan, pengganti $\frac{d}{dx}$. Jadi $\frac{dy}{dx}$ dapat ditulis Dy, sebagai operasi turunan pertama dari suatu fungsi. Turunan kedua suatu fungsi dapat ditulis D^2y, demikian seterusnya D^3y,…., D^ny.

Selanjutnya dapat ditulis D (sin x) = cos x

$D\,(e^{ax}) = a\,e^{ax}$

$D\,(X^2 + 6x + 7) = 2x + 6.$

$D^2\,(\sin x) + D\,(\cos x) = -\sin x$

Keuntungan penggunaan D sebagai operator differensial adalah dapat diolah sesuai dengan kaidah-kaidah aljabar, seperti sifat assosiatif, distributif, dan komulatif, penjumlahan, perkalian, dan pemaktoran.

Contoh :

1. $(D+2)\{\sin x\} = D\{\sin x\} + 2\sin x + \cos x + 2\sin x$
2. $(D+2)^2\{\sin x\} = (D^2 + 4D + 4)\{\sin x\}.$

$$= D^2\{\sin x\} + 4D\{\sin x\} + 4\sin x$$
$$= D\{\cos x\} + 4\cos x + 4\sin x$$
$$= -\sin x + 4\cos x + 4\sin x$$
$$= 3\sin x + 4\cos x$$

3. $D^2 - 2D - 3)y = (D-3)(D+1)y$

Bila D menyatakan operator turunan suatu fungsi, maka sebagai inversnya(integral suatu fungsi) digunakan notasi $\frac{1}{D}$ sebagai operator integrasi.

Operator invers $\frac{1}{D}$ atau D $^{-1}$ menyatakan proses integrasi terhadap variabel bebas dengan menghilangkan konstanta integrasinya.

Sebagai contoh :

$$\frac{1}{D}\{\cos x\} = \sin\ x \qquad \text{atau} \qquad D^{-1}\{\cos x\} = \sin x$$

$$\frac{1}{D}\{x^5\} = \frac{1}{6}x^6 \qquad\qquad D^{-1}\{x^5\} = \frac{1}{6}x^6$$

$$\frac{1}{D}\{e^{2x}\} = \frac{1}{2}e^{2x} \qquad\qquad D^{-1}\{e^{2x}\} = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\frac{1}{D}\left\{2x + \frac{1}{x}\right\} = x^2 + \ln x \qquad\qquad D^{-1}\left\{2x + \frac{1}{x}\right\} = x^2 + \ln x$$

Selanjutnya $\left(\frac{1}{D}\right)^2 = \frac{1}{D^2} = D^{-1}$ menyatakan integral lipat dari suatu fungsi. Jadi $\frac{1}{D^2}\{f(x)\}$ menyatakan hasil integral fungsi f(x) terhadap x. sebanyak dua kali, tanpa menggunakan konstanta integrasinya.

Sebagai contoh :

$$\frac{1}{D^2}\{x^{20} - 3x + 2\} = \frac{1}{D}\left\{\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right\}$$

$$= \frac{1}{12}x^4 \frac{3}{6}x^3 + x^2$$

$$= \frac{1}{12}x^4 \frac{1}{2}x^3 + x^2$$

Dalam menggunakan operator D, perlu dipahami tiga jenis teorema yang dapat mempermudah penyelesaian masalah integrasi pada persamaan differensial.

Teorema I: F (D) {e ^{cx}} = e ^{cx} F(a)

Dengan a sebagai konstanta :

$$\left.\begin{array}{l} D\{e^{cx}\} = ce^{cx} \\ D^2\{e^{cx}\} = c^2e^{cx} \end{array}\right\} \because (D^2 + D)\{e^{cx}\} = c^2e^{cx} + ce^{cx}$$

$$= e^{cx}(c^2 + c)$$

Contoh ini memberikan bahwa pernyataan D diganti oleh C. artinya untuk setiap F (D) yang dioperasikan terhadap e^{cx} akan menghasilkan F (C) = e^{cx}

Contoh : 1. $(D^2 - 2D - 3)\{e^{cx}\} = (c^2 - 2c - 3)e^{cx}$

2. $(D^2 - 4)\{e^{3cx}\} = (3^2 - 4)e^{3cx} = 5e^{3cx}$

3. $(2D^2 + 5D - 2)\{e^{2x}\} = (2.4 + 5.2 - 2)e^{2x} = 16e^{2x}$

Fungsi D yang dioperasikan pada e^{cx} akan menghasilkan e^{cx} dikali dengan F(a). Aturan tersebut juga, berlaku pada operator invers fungsi D yang dioperasikan pada e^{cx}

Contoh : 1. $\frac{1}{(D+2)}\{e^{2x}\} = \frac{1}{(2+2)}e^{2x} = \frac{1}{4}e^{2x}$

2. $\frac{2}{(D+3)}\{e^{3x}\} = \frac{2}{(9+3)}e^{3x} = \frac{1}{6}e^{3x}$

3. $\frac{1}{(D^2 - 4D - 1)}\{e^{-2x}\} = \frac{1}{(4+8-1)}e^{-2x} = \frac{1}{11}e^{-2x}$

4. $\frac{2}{(D-3)(D+4)}\{e^{-x}\} = \frac{1}{(-1-3)(-1+4)}e^{-x} = -\frac{1}{6}e^{-x}$

Teorema II : F(D){e^{cx}.V} = e^{cx}. F(D + C) {V}

Dimana C sebagai konstanta dan v sebagai fingsi x. Jika suatu fungsi D dioperasikan pada { e^{cx}.V}, dengan V sebagai fungsi x, maka fungsi D berubah menjadi fungsi (D + a) yang sama dan bekerja pada V saja dikali dengan e^{cx}.

Bukti : D{e^{cx}.V} = e^{cx}. D {V} + Ce^{cx} $\xrightarrow{\text{ingat}}$ bentuk y = u .v

= [D{V} + C.V]. e^{cx}

= F(D + C) {V}. e^{cx}

Contoh : 1. $(D^2 + D + 5)\{e^{cx}.V\} = [(D + C)^2 + (D + C)]\{V\}.\ e^{cx}$

2. $(D - 4)\{e^{3x}.\ x^2\} = [(D + 3) - 4]\{X^2\}.\ e^{3x}$

$= (D - 1)\{x^2\}.\ e^{3x}$

$= [D(x^2) - x^2].e^{3x}$

$= (2x - x^2).\ e^{3x}$

3. $(D^2 + 2D - 3)\{e^{2x}.\sin x\} = [(D + 2)^2 + 2(D + 2) - 3]\{\sin x\}.\ e^{2x}$

$= (D^2 + 4D + 4 + 2D + 4 - 3)\{\sin x\}.\ e^{2x}$

$= (4 \sin x + 6 \cos x).e^{2x}$

4. $(D^2 + 5)\{e^{5x}.\cos 2x\} = [(D + 5)^2 + 5]\{\cos 2x\}.\ e^{5x}$

$= (D^2 + 10D + 25)\{\cos 2x\}.\ e^{5x}$

$= (-4 \cos 2x - 20 \sin 2x + 30 \cos 2x).\ e^{5x}$

$= (26 \cos 2x - 20 \sin 2x).\ e^{5x}$

5. $(D^2 - 3D + 4)\{e^{-x}.\cos 3x\} = [(D - 1) - 3(D - 1) + 4]\{\cos 3x\}.\ e^{-x}$

$= (D^2 - 2D + 1 - 3D + 3 + 4)\{\cos 3x\}.\ e^{-x}$

$= (D^2 - 5D + 8)\{\cos 3x\}.\ e^{-x}$

$= (-9 \cos 3x + 15 \sin 3x + 8 \cos 3x).\ e^{-x}$

$= (15 \sin 3x - \cos 3x).\ e^{-x}$

Aturan tersebut juga berlaku untuk operator invers fungsi D yang beroperasi pada e^{cx}.

Contoh :

1. $\dfrac{1}{D^2 + 4D + 5}\{x^3.e^{-2x}\} = \dfrac{1}{(D-2)^2 + 4(D-2) + 5}\{x^3\}.e^{-2x}$

$$= \frac{1}{D^2 - 4D + 4 + 4D - 8 + 5}\{x^3\}.e^{-2x}$$

$$= \frac{1}{D^2 + 1}\{x^3\}.e^{-2x}$$

$$= (D^2+1)^2 \{x^3\}.e^{2x}$$

Menurut teorema deret Binominal.

$$(1+D^2)^{-1} = 1 - D^2 + D^4 - D^6 + D^8 - D^{10} + ...$$

Sehingga :

$$= (D^2+1)^{-1}\{x^3\}.e^{-2x}$$

$$= (1 - D^2 + D^4 - D^6 + ...)\{x^3\}.e^{-2x}$$
$$= (x^3 - 6x + D - 0 + 0 + ...).e^{-2x}$$
$$= (x^3 - 6x).e^{-2x}$$

2. $$\frac{1}{D^2+3}\{x^3\} = \frac{1}{3}\frac{1}{\left(1+\frac{D^2}{3}\right)}\{x^3\}$$

$$= \frac{1}{3}\left(1+\frac{D^2}{3}\right)^{-1}\{x^3\}$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{D^2}{3} + \frac{D^4}{9} - \frac{D^6}{27} \dots\right)\{x^3\}$$

$$= \frac{1}{3}(x^3 - 2x + 0 - 0) = \frac{1}{3}(x^3 - 2x)$$

Teorema III : Fungsi D^2 yang dioperasikan pada sin cx, atau cos cx (atau kedua-duanya), tidak merubah nilai kedua fungsi tersebut, tetapi nilai D^2 berubah menjadi ($-c^2$).

Jadi :

$$F(D^2)\begin{Bmatrix}\sin cx\\ \cos cx\end{Bmatrix} = F(-C^2)\begin{Bmatrix}\sin cx\\ \cos cx\end{Bmatrix}$$

Contoh : 1. $(D^2 - 5)\{\sin 2x\} = (-4 - 5)\sin 2x = -9\sin 2x$

2. $$\frac{1}{D^2+4}\{\cos 3x\} = \frac{1}{-9+4}\cos 3x = -\frac{1}{5}\cos 3x$$

$$3.\ \frac{1}{D^2-3}\{\sin 3x+\cos 4x\}=\frac{1}{-9-3}\sin 3x+\frac{1}{-16-3}\cos 4x$$

$$=-\frac{1}{12}\sin 3x-\frac{1}{19}\cos 4x$$

Kesimpulan : Teorema I. F (D) {e^{cx}} = e^{cx} F(c)

II. F (D) {e^{cx}.V} = e^{cx}. F (D + C) {V}

III. $F(D^2)\begin{Bmatrix}\sin cx\\ \cos cx\end{Bmatrix}=F(-C^2)\begin{Bmatrix}\sin cx\\ \cos cx\end{Bmatrix}$

* Penggunaan operator D dalam penyelesaian PD ordo dua adalah mendapatkan hasil integral khusus, sedangkan fungsi komplementer didapat dari persamaan karakteristik PD tersebut.

Contoh : $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+3y=e^{2x}$

1. FK : m^2 + 4m +3 = 0

   (m +1) (m + 3) = 0

   $\left.\begin{array}{l} m_1=-1\\ m_2=-3\end{array}\right\} yc=c_1e^{-x}+c_2e^{-3x}$

2. IK, dengan membuat bentuk operator D sebagai berikut :

   $(D^2+4D+3)y=e^{2x}$

   yp = $\frac{1}{D^2+4D+3}\{e^{2x}\}$

   yp = $\frac{1}{4+8+3}.e^{2x}$

   = $\frac{1}{15}.e^{2x}$

3. jadi : y = yc + yp = $c_1e^{-x}+c_2e^{-3x}+\frac{1}{15}.e^{2x}$

Operator D, dapat juga digunakan untuk menyelesaikan PD ordo dua secara utuh ; contohnya sebagai berikut.

Selesaikan PD berikut dengan integral langsung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = e^{2x}$$

Jawab : Bentuk operator D dari persamaan adalah

$$(D^2 + 4D + 3)y = e^{2x}$$

$$(D+3)(D+1)y = e^{2x}$$

Misalkan (D + 1) y = u

Persamaan menjadi

$$(D+3)u = e^{2x}$$

$$Du + 3u = e^{2x}$$

$$\underline{\frac{du}{dx} + 3u = e^{2x}} \quad \text{x } e^{3x} \text{ (faktor integrasi)}$$

$$\frac{d}{dx}(u.e^{3x}) = e^{5x}$$

$$u.e^{3x} = \int e^{5x}dx + c_1$$

$$u.e^{3x} = \frac{1}{5}e^{5x} + c_1$$

$$u = \frac{1}{5}e^{2x} + c_1e^{-3x}$$

$$(D+1)y = \frac{1}{5}e^{2x} + c_1e^{-3x}$$

$$Dy + y = \frac{1}{5}e^{2x} + c_1e^{-3x}$$

$$\underline{\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{5}e^{2x} + c_1e^{-3x}} \quad \text{x } e^{x} \text{ (faktor integrasi)}$$

$$\frac{d}{dx}(y.e^{x}) = \frac{1}{5}e^{3x} + c_1e^{-2x}$$

$$y.\ e^{x} = \int\left(\frac{1}{5}e^{3x} + c_1e^{-2x}\right) dx + c_2$$

$$y.\ e^x = \frac{1}{15}e^{3x} - \frac{c_1}{2}e^{-2x} + c_2$$

$$y = \frac{1}{15}e^{2x} - \frac{c_1}{2}e^{-3x} + c_2 e^{-x}$$

Hasil ini sama dengan hasil pada contoh sebelumnya.

F. Jawaban PDL Ordo Dua Homogen dengan Koefisien Konstanta

Ambil salah satu persamaan linier ordo dua homogen dengan koefisien konstanta dalam bentuk:

$$(D^2 + a_1 D + a_2)\,y = 0.....(1)$$

bila y_1 dan y_2 merupakan jawabannya dengan c_1 dan c_2 sebagai konstanta, maka jawaban umumnya adalah:

$$y = c_1\ y_1 + c_2\ y_2\ .....(2)$$

dimana, y_1 dan y_2 merupakan jawaban bebasnya. Dalam hal ini y_1 bukan konstan yang dikali dengan y_2. contohnya bila $y_1 = k\ y_2$, maka

$$y = c_1\ y_1 + c_2\ y_2 = c_1\ h\ y_2 + c_2\ y_2 = c_1\ y_2$$

dimana, C = (c_1 h + c_2). Jadi (2) hanya mengandung konstanta real yang spesifik.

Bila $y = c_1\ y_1 + c_2\ y_2$ merupakan jawaban umum (1) maka:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0.....(3)$$

determinan ini (dinyatakan wronskian dari y_1 dan y_2), menyatakan bahwa pernyataan ini tidak benar bila (2) sebagai jawaban umum selanjutnya, bila $y_1 = k\ y_2$ dan $y_1' = k\ y_2'$, determinan dari (3) menjadi nol, karena

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k\,y_2' & y_2 \\ k\,y_2' & y_2' \end{vmatrix} = k.0 = 0$$

karena itu (3), kedua hal diatas merupakan syarat cukup untuk y_1 dan y_2 menjadi bebas dan bentuk $c_1\ y_1 + c_2\ y_2$ menjadi jawaban umum dari (1), dimana c_1 dan c_2 merupakan konstanta sembarang.

Bentuk jawaban PDL Ordo Dua

Bila disubstitusikan $y = e^{mx}$ ke dalam persamaan (1) dimana m sebagai konstanta, maka didapat:

$$Y' = m\, e^{mx} \text{ dan } y'' = m^2\, e^{mx} \text{ dan}$$

$$(D^2 + a_1 D + a_2)\, e^{mx} = (m^2 + a_1 m + a_2)\, e^{mx} = 0$$

karena $e^{mx} \neq 0$, yang merupakan identitas dari x dan jika m bilangan, sehingga

$$m^2 + a_1 m + a_2 = 0 \quad \ldots..(4)$$

persamaan kuadrat ini merupakan persamaan karakteristik dari (1). Telah dinyatakan bahwa $y = e^{m_1 x}$ sebagai solusi untuk PDL homogen dari

$$(D^2 + a_1 D + a_2)\, y = 0$$

jika hanya jika m_1 merupakan akar-akar dari persamaan karakteristik (persamaan bantu) dengan bentuk: $m^2 + a_1 m + a_2 = 0$ karena persamaan (4) adalah persamaan kuadrat maka akar-akarnya ada dua yaitu m_1 dan m_2, sehingga untuk mendapatkan jawaban umum dari (1), terdapat tiga kasus yang berhubungan dengan nilai m_1 dan m_2 untuk persamaan (4), yaitu real, berbeda, kembar dan bilangan kompleks.

Kasus 1: $m_1 \neq m_2$

Dari akar-akar $m_{1.2} = \dfrac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^{\,2} - 4a_2}}{2}$

Bila $(a_1^2 - 4a_2) > 0$, maka $m_1 \neq m_2$ dan real dan berbeda karena $m_1 \neq m_2$ merupakan harga akar-akar persamaan (4) didapat dua jawaban PD (1) yaitu $y_1 = e^{m_1 x}$ dan $y_1 = e^{m_2 x}$.

Wronskian dari y_1 dan y_2 tidak nol sehingga y_1 dan y_2 saling bebas dan didapat: $y = C_1 C^{m_1 x} + C_2 C^{m_2 x}$ (jawaban umum).

Dimana c_1 dan c_2, konstanta sebarang.

A. Penyelesaian PD dua dapat langsung juga diselesaikan dengan menggunakan integral langsung dari operator D, sebagai berikut.

Bentuk $(D^2 + a_1 D + a_2)\, y = 0$, bila akar-akarnya m_1 dan m_2 akan dapat difaktorkan menjadi $(D - m_1)(D - m_2)\, y = 0$.

Misalkan (D – m_2) y = u

Persamaan menjadi ; sebagai berikut.

$(D^2 + a_1 D + a_2)\, y = 0$

$(D - m_1)(D - m_2)\, y = 0$

$(D - m_1)\, u = 0$

$Du - m_1 u = 0$

$\frac{du}{dx} - m_1 u = 0 \quad . \; e^{-m_1 x}$ (faktor integrasi)

$\frac{d}{dx}(u.e^{-m_1 x}) = 0$

u. $e^{-m_1 x} = c_1$

u = $c_1 e^{m_1 x}$

(D – m_2) y = $c_1 e^{m_1 x}$

$\frac{dy}{dx} - m_2 y = c_1 e^{m_1 x} \quad . \; c_1 e^{-m_2 x}$

$\frac{d}{dx}(y.c_1 e^{-m_2 x}) = c_1 e^{(m_1 m_2)x}$

$\frac{d}{dx}(y.c_1 e^{-m_2 x}) = \int c_1 e^{(m_1 m_2)x} dx + c_2$

y = $A.e^{m_1 x} + B.e^{m_2 x}$

Dengan : A = $\frac{c_1}{m_1 - m_2}$ sebagai konstanta dan B = C_2, juga konstanta.

Contoh :

Selesaikan $\frac{d^2 y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 10y = 0$

Jawab :

Dalam bentuk operator dapat ditulis $(D^2 + 3D - 10)\, y = 0$

Persamaan karakteristik:

$$m^2 + 3m - 10 = 0$$
$$(m + 5)(m - 2) = 0$$

harga akar-akarnya : $\begin{aligned} m_1 &= -5 \\ m_2 &= 2 \end{aligned}$

didapat: $y = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{2x}$

merupakan jawaban umum dari PD.

Kasus 2: $(a_1^2 - 4a_2) = 0$; **menghasilkan** $m_1 = m_2 = m$

Salah satu jawaban dari (1) adalah y = e^{mx} dan jawaban lainnya adalah y = x e^{mx} selanjutnya:

$$\begin{aligned} D(xe^{mx}) &= m.xe^{mx} + e^{mx} \\ \text{dan } D^2(xe^{mx}) &= m^2 xe^{mx} + 2me^{mx} \end{aligned}$$

Bila kasus ini disubsitusikan ke dalam persamaan semula akan didapat

$$\begin{aligned} (D^2 - 2mD - m^2)x\,e^{mx} &= (m^2 x\,e^{mx} + 2m\,e^{mx}) - 2m(mx\,e^{mx} + 2m\,e^{mx}) + m^2 x\;e^{mx} \\ &= xe^{mx}(m^2 - m^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dalam bentuk x

Karena itu y = x e^{mx} adalah jawaban dari (5). Jawaban umum untuk (5) adalah:

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{mx} + c_2 xe^{mx} \\ y &= e^{mx}(c_1 + c_2 x) \end{aligned}$$

dimana c_1 dan c_2 sebarang. Coba turunkan rumus dengan integral langsung.

Contoh :

Selesaikan $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 14\dfrac{dy}{dx} + 49y = 0$

Jawab

Dalam bentuk operator PD ditulis $(D^2 - 14D + 49)y = 0$

Persamaan karakteristik:

$$\begin{aligned} m^2 - 14m + 49 &= 0 \\ (m - 7)^2 &= 0 \\ m_1 = m_2 &= 7 \end{aligned}$$

Jadi jawaban umum untuk PD adalah: y = (c_1 + c_2 x) e^{7x}

Kasus 3: $(a_1^2 - 4a_2) < 0$, **menghasilkan** $m_1 \neq m_2$ **dalam bentuk bilangan kompleks** $(\alpha \pm \beta i)$

Sehingga jawaban umum PD menjadi:

$$
\begin{aligned}
y &= c_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + c_2 e^{(\alpha-\beta i)x} \\
&= e^{\alpha x}\left(c_1 e^{\beta i x} + c_2 e^{-\beta i x}\right)
\end{aligned}
$$

karena menurut Deret Melaurin:

$$
\begin{aligned}
e^{\beta i x} &= \cos\beta x + i \sin\beta x \\
e^{-\beta i x} &= \cos\beta x - i \sin\beta x
\end{aligned}
$$

Maka:

$$
\begin{aligned}
y &= e^{\alpha x}\left[c_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + c_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)\right] \\
y &= e^{\alpha x}\left[(c_1 + c_2)\cos\beta x + (c_1 - ic_2)\sin\beta x\right] \\
y &= e^{\alpha x}\left(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x\right)
\end{aligned}
$$

dimana $C_1 = (c_1 + c_2)$ dan $C_2 = (i\,c_1 + i\,c_2)$

Persamaan ini merupakan jawaban umum dari persamaan differensial ordo dua dalam bentuk x.

Contoh :

Selesaikan $y'' – 4y 13y = 0$

Jawab

Persamaan karakteristik:

$$
\begin{aligned}
m^2 - 4m + 13 &= 0 \\
m_{1.2} &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} \\
&= 2 \pm 3i
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned} \alpha &= 2 \\ \beta &= 3 \end{aligned}\right\} \; y = e^{2x}\left(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x\right)
$$

Merupakan jawaban umum untuk PD yang diberikan

Soal

Tentukan jawaban umum dari persamaan differensial berikut:

1. $y''-5y'+6y=0$
2. $y''+6y'-7y=0$
3. $y''+5y'-6y=0$
4. $y''-6y'+9y=0$
5. $6y''+7\dfrac{dy}{dx}-3=0$
6. $y''-4y=0$
7. $y''+9y=0$
8. $y'' + 2y' + 2y = 0$
9. $y''+y'+y=0$

10. Tunjukan bahwa jawaban umum

dari $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 26\dfrac{dy}{dx} + C^2y = 0$

Dengan b dan c bilangan real

dapat ditulis

$$y = e^{bx}\left(C_1 \cosh\sqrt{b^2C^2}\,x + C_2 \sinh\sqrt{b^2C^2}\,x\right)$$

cat : cosh β x = $\dfrac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2}$

Sinh β x = $\dfrac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2}$

G. Kesimpulan

Untuk PD ordo dua homogen dalam bentuk $(D^2 + a_1 D + a_2)y = 0$ dengan konstanta, memiliki persamaan karakteristik koefisien $(m^2 + a_1 m + a_2 = 0)$ yang memilki akar-akar m_1 dan m_2 akan memiliki jawaban umum.

(1) $y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$

Dengan m_1 dan m_2 merupakan konstanta sebarang yang berbeda dan C_1 dan C_2 koefisien konstanta.

(2) Bila $m_1 = m_2$, jawaban umumnya adalah

$y = (C_1 + C_2 x)e^{mx}$

(3) Bila $r_1 = \alpha + \beta i$ dimana α dan β bilangan real, maka jawaban umum dari PD adalah

$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

H. Persamaan Linier Ordo Dua Tak Homogen

Persamaan linier ordo dua tak homogen dengan koefisien konstanta ditulis dalam bentuk:

$(D^2 + a_1 D + a_2)y = f(x)$.....(1)

dimana a_i koefisien konstanta yang umumnya diasumsikan sebagai bilangan real.

Bentuk homogen dari (1) adalah

$(D^2 + a_1 D + a_2)y = 0$.....(2)

dengan jawaban umum: $y_c = C_1 . U_1 + C_2 . U_2$.....(3)

dimana U_1 dan U_2 merupakan fungsi x

Persamaan (3) dinyatakan fungsi komplementer dari persamaan linier tak homogen (1). Bila bentuk utama dari jawaban (1) dapat diketahui, maka jawaban umumnya dapat dicari dengan teorema berikut.

Bila PD $(D^2 + a_1 D + a_2)y = f(x)$ memiliki integral khusus y_p dan fungsi komplementer y_c, maka jawaban umumnya adalah:

$y = y_c + y_p = C_1 U_1 + C_2 U_2 + y_p$

dengan dua konstanta sebarang.

Bila disubstitusikan ke (1) akan mengahasilkan

$$\left(D^2 + a_1 D + a_2\right)\left(y_c + y_p\right) = f(x)$$

atau $\left(D^2 + a_1 D + a_2\right) y_c + \left(D^2 + a_1 D + a_2\right) y_p = f(x)$

dengan ruas pertama berharga nol, karena y_c merupakan salah satu jawaban(2) dan ruas kanan merupakan persamaan dalam bentuk x karena y_p juga merupakan jawaban dari (1).

Contoh 1

Tentukan jawaban umum dari persamaan differensial linier tak homogen $(D^2 – 1)\ y = -2x$

Penyelesaian

Dengan coba-coba didapat salah satu jawabannya y = 2x sebagai jawaban utamanya. Fungsi komplementernya adalah $y_c = C_1\ e^x + C_2\ e^{-x} + 2x$.

Pada contoh ini jawaban umum dari PDL non homogen diterka (tebak), Selanjutnya akan dibahas cara untuk mendapatkan jawaban utama (integral khusus) dari PDL non homogen dengan koefisien konstanta, apabila fungsi komplementernya telah diketahui. Metodenya diosebut sebagai “metode variasi parameter”. Untuk mendapatkan jawaban integral khusus untuk (1), dimulai dari mengganti C_1 dan C_2 yang ada pada fungsi komplementer (3) dengan sembarang fungsi x, yaitu x, $v_1(x)$ dan $v_2(x)$. Dengan U_1 dan U_2 sebagai jawaban yang saling bebas dari (2) dan selanjutnya perhitungan $v_1(x)$ dan $v_2(x)$, sehingga dapat ditulis, persamaan sebagai berikut.

$$y = V_1(x)\ .\ U_1 + V_2(x)\ .\ U_2 \ldots..(4)$$

sebagai integral khusus dari (1).

Karena (4) sebagai jawaban integral khusus dari (1), maka turunan pertama dan keduanya dapat dimasukan ke dalam (1) dalam bentuk x.

Hasil differensial (4) terhadap x adalah $y' = v_1\ u_1' + v_2\ u_2' + \left(v_1' u_1 + v_2' u_2\right)$ ...(5)

Karena v_1 dan v_2 merupakan fungsi sebarang dari x, maka akan didapat dua kemungkinan dalam bentuk v_1 dan v_2. Selanjutnya bila (5) diturunkan lagi maka bentuk pertama dalam v_1 dan v_2 adalah:

$v_1'u_1 + v_2'u_2 = 0$.....(6)

sehingga (5) menjadi: $y' = v_1 u_1' + v_2 u_2'$

Turunan dari (7) terhadap x adalah: $y'' = v_1 u_1'' + v_2 u_2'' + (v_1'u_1' + v_2'u_2')$....(8)

Dengan mensubsitusikan (4), (7), dan (8) ke (1), maka didapat bentuk khusus dalam v_1 dan v_2 sesuai dengan pengembangan persamaan dalam bentuk x. Hasil dari subsitusi adalah:

$$v_1 u_1'' + v_2 u_2'' + (v_1'u_1' + v_2'u_2') + a_1 (v_1 u_1' + v_2 u_2') + a_2 (v_1 u_1 + v_2 u_2) = f(x)$$

atau, $\quad v_1 (u_1'' + a_1 u_1'' + a_2 u_1) + v_2' (u_2'' + a_1 u_2'' + a_2 u_2) + v_1' + u_1' + v_2' u_2' = f(x)$

Karena v_1 dan v_2 merupakan jawaban dari (2) maka persamaan ini menjadi:

$$v_1'.u_1' + v_2'.u_2' = f(x).....(\ 9)$$

Dua keadaan yang berisikan dua pernyataan sembarang dalam $v_1(x)$dan $v_2(x)$, yaitu bentuk (6) dan (9) adalah:

$$\left.\begin{array}{l} v_1'.u_1 + v_2'.u_2 = 0.... \\ v_1'.u_1' + v_2'.u_2' = f(x) \end{array}\right\} \ldots\ldots(10)$$

kedua persamaan ini linier dalam bentuk v_1' dan v_2' dengan syarat; u_1 dan u_2 berbentuk linier yang saling bebas

Sehingga $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} \neq 0$

Selanjutnya sistem (10) dalam v_1' dan v_2' merupakan jawaban yang unik setelah mendapatkan jawaban untuk $v_1'(x)$ dan $v_2'(x)$, dapat dicari $v_1(x)$ dan $v_2(x)$ dengan integral. Ini adalah jawaban integral khusus dari (1) yaitu:

$$y_p = v_1(x).u_1 + v_2(x).u_2 \quad \text{dari (4)}$$

Kesimpulan dari metode variasi parameter.

Integral khusus dari PDL non homogen ordo dua dengan koefisien konstanta.

$(D^2 + a_1 D + a_2)y = f(x)$

adalah

$$y_p = v_1(x) . u_1(x) + v_2(x) . u_2(x)$$

v_1 dan v_2 sebagai fungsi x yang membentuk sistem persamaan

$$v_1'u_1 + v_2'u_2 = 0$$
$$v_1'u_1' + v_2'u_2' = f(x)$$

Contoh 2

Selesaikan PDL non homogen berikut.

$(D^2 + 1)\ y = \sec x$…..(11)

Jawab : jawaban umum bentuk homogennya adalah $(D^2 + 1)\ y = 0$

Persamaan karakteristik: $m^2 + 1 = 0$

$$m_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

$$\text{jadi} \left.\begin{matrix}\alpha = 0\\ \beta = 1\end{matrix}\right\} \text{didapat } y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x \text{.....(12)}$$

Merupakan fungsi komplementer dari persamaan (11). Untuk mendapatkan integral khusus dari (11), ganti c_1 dan c_2 dalam (12) ke bentuk fungsi x sebarang, yaitu $v_1(x)$ dan $v_2(x)$, sehingga didapat:

$$y = v_1(x)\ \cos x + v_2(x)\ \sin x \text{.....(13)}$$

Untuk mendapatkan v_1 dan v_2, maka (13) merupakan integral khusus dari (11). Fungsi v_1' dan v_2' didapat dengan menyelesaikan persamaan.

$$v_1'\cos x + v_2'\sin x = 0$$
$$-v_2'\sin x + v_2'\cos x = \sec x \text{.....(14)}$$

selanjutnya didapat : bentuk matriknya

$$\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1' \\ v_2'\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \sec x\end{vmatrix}$$

$$v_1(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} o & \sin x\\ \sec x & \cos x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ \sin x & \cos x\end{vmatrix}} dx = \int \frac{-\sin x . \sec x}{1} dx = \int \tan x\ dx = \int \tan x\, dx = \ln \cos x$$

$$v_2(x) = \int \frac{\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & \sec x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}} dx = \int \frac{\cos x . \sec x}{1} dx = \int dx = x$$

Karena perhitungan hanya memerlukan jawaban integral khusus, maka jawaban tidak memerlukan konstanta pada $v_1(x)$ dan $v_2(x)$.

Dengan demikian didapat: $y_p = v_1(x).u_1 + v_1(x).u_2$,

$$y_p = \cos x . \ln \cos x + x \sin x$$

Selanjutnya, jawaban umum untuk (11) adalah:

$$\begin{aligned} y_p = y_c + y_p &= c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \ln \cos x + x \sin x \\ &= \cos x\,(c_1 + \ln \cos x) + \sin x\,(c_2 + x) \end{aligned}$$

I. Soal

Selesaikan dengan metode variasi variabel

1. $y'' + y = 5$
2. $y'' - 3y' + 2y = 5x + 2$
3. $y''' + y = \operatorname{cosec} x . \cot x$
4. $y'' - 4y = e^{2x}$
5. $y'' + y = \tan x$
6. $y'' + y = \cos x$
7. $y'' + 5y' + 6y = 2e^{x}$
8. $y'' + y = \cot x$
9. $y''' - 3y' + 2y = e^{x}$
10. $y'' + y = \sec^2 x$

J. Penyelesaian dengan Integral langsung

PDL non homogen dalam bentuk $(D^2 + a_1 D + a_2)\,y = f(x)$ yang memiliki akar-akar faktor m_1 dan m_2, dapat ditulis dalam bentuk:

$(D - m_1)\ (D - m_2)\ y = f(x)$

penyelesaian dapat menggunakan dengan memisalkan $u = (D - m_2)y$, sehingga persamaan menjadi:

$$(D - m_1)\ u = f(x)$$

yang merupakan bentuk PDLordo satu yang dapat ditulis:

$$D.u - m_1.u = f(x)$$

$$\frac{du}{dx} - m_1 \, . u = f(x) \qquad \text{x } e^{-m_1 x} \quad \text{(faktorintegral)}$$

$$\frac{d}{dx}(u \, . e^{-m_1 x}) = f(x). e^{-m_1 x}$$

$$u \, . e^{-m_1 x} = \int f(x). e^{-m_1 x} \, dx + c_1$$

$$u = e^{m_1 x} \int f(x). e^{-m_1 x} \, dx + c_1 \, . e^{m_1 x}$$

substitusikan u = (D – m_2) y didapat :

$$(D - m_2) y = e^{m_1 x} \int f(x). e^{-m_1 x} \, dx + c_1 \, . e^{m_1 x}$$

$$\text{atau } \frac{dy}{dx} - m_2 y = e^{m_1 x} \int f(x). e^{-m_1 x} \, dx + c_1 \, . e^{m_1 x} \qquad \text{x } e^{-m_2 x} \quad \text{(faktorintegral)}$$

$$\frac{d}{dx}(y \, . e^{-m_2 x}) = e^{(m_1 - m_2) x} \int f(x). e^{-m_1 x} \, dx + c_1 \, . e^{(m_1 - m_2) x}$$

$$y \, . e^{-m_2 x} = \int e^{(m_1 - m_2) x} \int f(x). e^{-m_1 x} \, dx + c_1 \int e^{(m_1 - m_2) x} \, dx + c_2$$

$$y = e^{m_2 x} \int e^{(m_1 - m_2) x} \int f(x). e^{m_1 x} (dx)^2 + c_1 \int e^{(m_1 - m_2) x} \, dx + c_2 \, . e^{m_2 x}$$

hasil integralnya adalah jawaban umum untuk PDL non homogen ordo dua.

K. Penyelesaian dengan Duplikasi f(x), Untuk Memperoleh Jawaban Integral Khusus.

Untuk mendapatkan jawaban integral khusus y_p = (D^2 + a.D + a_2) y = f(x) dapat digunakan duplikasi bentuk umum dari f(x) dan turunan pertama serta turunan keduanya. Konstanta-konstantanya dicari dengan mensubstitusikan ke dalam bentuk persamaan dan menyamakan koefisien-koefisien yang selaras.

Bentuk umum untuk duplikasi yang sering digunakan adalah:

Jika

1. f(x) = c , misalkan y_p = A, y_p’ = 0 ; y_p’’ = 0
2. f(x) = c x , misalkan y_p = Ax + B ; y_p’ = A ; y_p’’ = 0
3. f(x) = cx^2 , misalkan y_p = Ax^2 + Bx + C ; y_p’=2Ax + B ; y_p’’ = 2A
4. f(x) = c sin ax , misalkan y_p = A cos ax + B sin ax

   = c cos ax   y’$_p$ = -a A sin ax + aB cos ax

   y”$_p$= -a^2 A cos ax – a^2 B sin ax

5. f(x) = $\begin{cases} c\sin ax \\ c\cos ax \end{cases}$ c sin ax , misalkan y_p = A cosh ax + B sin ax

y'_p = a A sinh ax + a B cosh ax

$y''_p = a^2$ A cosh ax – a^2 B sinh ax

6. f(x) = e^{ax} , misalkan $y_p = Ae^{ax}$; y_p = a Ae^{ax} ; $y_p'' = a^2 Ae^{ax}$

dan seterusnya.

Contoh :

Selesaikan $y''-5\frac{dy}{dx}+6y=2\sin 4x$

Jawab :

1) Fungsi komplementer dengan persamaan karakteristik

$$m^2-5m+6=0$$
$$(m-2)(m-3)=0$$
$$\left.\begin{aligned} m_1 &= 2 \\ m_2 &= 3 \end{aligned}\right\} y_c = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

2) Integral khusus di cari dengan memisalkan

$$y_p = A\cos 4x + B\sin 4x$$
$$y'_p = -4A\sin 4x + 4B\cos 4x$$
$$y''_p = -16A\cos 4x - 16B\sin 4x$$

substitusikan ke dalam persamaan, kemudian samakan koefisien-koefisien yang selaras, untuk mendapatkan nilai A dan B.

Didapat

$$-16A\cos 4x - 16B\sin 4x - 5(-4A\sin 4x + 4B\cos 4x) + 6(A\cos 4x + B\sin 4x) = 2\sin 4x$$
$$(20A - 10D)\sin 4x - (10A + 20B)\cos 4x = 2\sin 4x$$

$$\left.\begin{aligned} 1.\ 20A - 10D &= 2 \\ 2.\ 10A + 20B &= 0 \end{aligned}\right\} \tfrac{1}{2}(1)-(2) \rightarrow \begin{array}{r} 10A - 5D = 1 \\ 10A + 20B = 0 \\ \hline -25B = 1 \end{array}$$

$$B = -\tfrac{1}{25}$$
$$A = \tfrac{2}{25}$$

jadi $y_p = \frac{1}{25}(2\cos 4x + \sin 4x)$

3) Jawaban umum persoalan adalah

$$y = A\,e^{2x} + B\,e^{3x} + \tfrac{1}{25}(2\cos 4x - \sin 4x)$$

L. Soal

a. Kerjakan dengan cara integral langsung!

1. $y'' - 7y' + 12y = e^{3x}$
2. $y'' - 6y' + 9y = 54x + 18e^{3x}$
3. $y'' - 5y' + 6y = 100\sin 2x$
4. $y'' - y' - 2y = 2\cos 2x$
5. $y'' - 6y' + 10y = 20x$
6. $y'' - 4y' + 3y = x + 2$
7. $y'' - 6y' + 8y = 5x + y$
8. $y'' - 56' + 8y = \cos x + \sin x$
9. $y'' - 2y - 8y = \cos x + \sin 5x + 4$
10. y’’-y’-12y=sinhx

b. Kerjakan dengan duplikasi!

1. $y'' - y' - 2y = 8$
2. $y'' - 4y = 10e^{3x}$
3. $y'' - 2y' - 3y = 4\sin 2x$
4. $y'' - 4y' + 3y = 4\cos 2x$
5. $y'' + 6y' + 8y = 2x^{1} + 6x$
6. $y'' - y' + - 2y = 1 - 2e^{x}$
7. $y'' - 4y' + 3y = -2e^{x}$
8. $y'' - 7y' + 10y = x^{2} - 4$
9. $y'' + 2y' + y = 2\cos x$
10. $y'' + 6\ 7y' + 9y = x^{2} + e^{3x}$

M. Persamaan differensial homogen Cauchy-Euler

Persamaan difeferansial *Cauchy-Euler* memilki bentuk linier :

$$(a+bx)^2\frac{d^2y}{dx}+(a+bx)\frac{dy}{dx}+cy=f(x).....(\ \ ....)$$

dengan a, b, dan c konstanta (bilangan real. Persamaan menjadi homogen apabila f(x) = 0.

Untuk menentukan jawaban umum (1) dapat digunakan pemisalan (a +bx) = e^t, sehingga $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{b}.e^t$, $=\ \frac{1}{b}(a+bx)$, yang akan mengubah koefisien variabel menjadi koefisien konstanta. Cara lain adalah dengan menggunakan pemisahan (a +bx)^m = y, sehingga y^1 = m (a + bx)$^{m-1}$ dan y'' = m (m-1) (a + bx)$^{m-2}$, yang akan mengubah variabel persamaan menjadi persamaan dalam bentuk karakteristik r :

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{b}e^t=\frac{1}{b}(a+bx)$$

1. Cara pemisalan (a + bx) = e^t

   Dengan pemisahan ini didapat t = ln (a + bx) dan $\frac{dx}{dt}=e^t=(a+bx)$. Cara pemisalan ini akan mengubah PD dari bentuk $\frac{dy}{dx}$ menjadi bentuk $\frac{dy}{dt}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ menjadi bentuk $\frac{d^2y}{dt^2}$ sehingga diperoleh PDL homogen ordo dua koefisien konstanta dalam y dan t.

Contoh :

Tentukan jawaban umum dari PD ; $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}-4y=10$

Misalnya x = e^t dan $\frac{dx}{dt}=e^t=x$ dan $t=\ln x$, sehingga $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dt}=x\frac{dy}{dx}$.

Turunan kedua fungsi y terhadap t adalah :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$=\frac{dx}{dt}.\frac{dy}{dx}+x\frac{dx}{dt}.\frac{dy}{dx}$$

$$= x\frac{dy}{dx} + x^{2}\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$= \frac{dy}{dt} + x^{2}\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

substitusikan ke dalam persamaan, didapat PD dalam fungsi y terhadap t sebagai berikut:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 4\frac{dy}{dt} - 4y = 10$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} - 4y = 10.....(*)$$

a. Fungsi komplementer dengan persamaan karakterstik

$$m^2 + 3m - 4 = 0$$

$$(m_1 + 4)(m - 1) = 0$$

$$\left.\begin{matrix} m_1 = -4 \\ m_2 = 1 \end{matrix}\right\} y_c = c_1e^{-4t} + c_2e^{t}$$

b. Integral khusus dengan memisalkan

$$y_p = A;\ y'_p = 0\ \ y''_p = 0$$

substitusikan ke dalam persamaan, didapat :

$$-4A = 10$$

$$A = -2\tfrac{1}{2}$$

$$\text{jadi } y_p = -2\tfrac{1}{2}$$

jawaban untuk PD (*) adalah: $y(t) = c_1e^{-4t} + c_2e^{t} - 2\tfrac{1}{2}$ karena t = ln x maka jawaban untuk fungsi y terhadap x adalah:

$$y(x) = c_1e^{\ln x^{-4}} + c_2e^{\ln x} - 2\tfrac{1}{2}$$

$$y(x) = c_1x^{-4} + c_2x - 2\tfrac{1}{2}$$

2. Cara pemisahan $(a + bx)^m$

Pemisahan ini akan mengubah bentuk PD ke bentuk persamaan karakteristik dalam m dengan cara mendifferensialkan $y = (a + bx)^m$ dalam bentuk turunan pertama dan kedua, kemudian substitusikan ke dalam persamaan awal:

$$\frac{dy}{dx} = m\,(a + bx)m\ \text{-}1 \text{ dan } \frac{d^2y}{dx^2} = m\,(m-1)\,(a+bx)^{m-2}$$

Contoh :

Selesaikan $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 4x \dfrac{dy}{dx} - 4y = 0$

Jawab

Misalkan:

$$y = (a + bx)^m$$

$$y' = m\,(a + bx)^{m-1}$$

$$y'' = m\,(m-1)\,(a+bx)^{m-2}$$

substitusikan ke dalam persamaan didapat untuk a = 0 dan b = 1 maka:

$$x^2 \left[m\,(m-1)\,x^{m-2} \right] + 4x\,(mx^{m-1}) - 4x^m = 0$$

bagi persamaan dengan x^m didapat:

$$m^2 + 3m - 4 = 0$$

$$(m+4)\,(m-1) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= -4 \\ m_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \text{didapat}: y = c_1\,y_1 + c_2\,y_2$$

$$y = c_1\,x^{m_1} + c_2\,x^{m_2}$$

$$y = c_1\,x^{-4} + c_2\,x$$

$\otimes$ **Gauchy's equestion**

Find a complete solution of the differential equestion

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 5x \frac{dy}{dx} - 15y = 0$$

under the transformation x = e^z or z = ln x we have by a

straight forward aplication of the cham rule:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dz}.\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}.\frac{dy}{dz} \rightarrow dz = \frac{1}{x}dx \rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}.\frac{dy}{dz}\right) = -\frac{1}{x}.\frac{d^2y}{dx^2}.\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x^2}.\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x^2}.\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^2}\left(-\frac{dy}{dz}+\frac{d^2y}{dz^2}\right)\right] = -\frac{2}{x^3}\left(-\frac{dy}{dz}+\frac{d^2y}{dz^2}\right)+\frac{1}{x^2}\left(-\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^3y}{dz^3}\right)\frac{dz}{dx}$$

$$= \frac{2}{x^3}\cdot\frac{dy}{dz} - \frac{3}{x^3}\cdot\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{x^3}\frac{d^3y}{dz^3}$$

subsituting these into the given differensial equestion, we have

$$x^3\left[\frac{1}{x^3}\left(2\frac{dy}{dx} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3}\right)\right] + 4x^2\left[\frac{1}{x^2}\left(-\frac{dy}{dz}+\frac{d^2y}{dz^2}\right)\right] - 5x\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right) - 15y = 0$$

or, simplifying and colectingterms

$$\frac{d^3y}{dz^3} + \frac{d^2y}{dz^2} - 7\frac{dy}{dz} - 15y = 0$$

the caracteristic equestion of the last equestion is

$$m^3 + m^2 - 7m15 = (m-3)(m^2 + 4m + 5) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= 3 \\ m_{2,3} &= -2 \pm i \end{aligned}\right\} y = c_1\, c^{3z} + e^{-2z}(c_1 \cos z + c_3\ \sin z)$$

finally, replacing z by ln x, we have:

$$\begin{aligned} y &= c_1\, e^{3\ln x} + e^{-2\ln x}\left(c_2 \cos \ln x + c_3 \sin \ln x\right) \\ &= c_1\, x^3 + x^{-2}\left[c_2 \cos(\ln x) + c_3 \sin(\ln x)\right] \end{aligned}$$

the general solution of the given diffrential following equestion

N. Soal

A. Selesaikan persamaan berikut:

1. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$
2. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$
3. $y'' - \frac{6}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 4$
4. $(x+1)^2y'' + (x+1)^2y' - y = 0$
5. $(2x+1)^2y'' - (2x+1)^2y' - 12y = 0$
6. $(x+2)^2y'' - 7(x-2)y' + 7y = 0$
7. $(x+1)^2y'' + 107(x+1)y' + 7y = 0$
8. $x^2y'' - 4xy' + 4y = 2x$
9. $x^2y'' - 4xy' + 4y = x^2$
10. $x^2y'' + 7xy' + 5y = -x$

B. Exercises: find a complete solution of each of the following equestion.

1. $x^2y'' + y' - y = 0$
2. $x^2y'' - 6y = 1 + \ln x$
3. $x^2y'' - xy' + y = x^5$
4. $x^3y''' - 3x^2y''' + 7xy' - 8y = 0$
5. $2x^2y'' + 5xy' + y = 3x + 2$