BAB VI
APLIKASI PERSAMAAN DIFFERENSIAL

Tujuan Pembelajaran

Tujuan dari pembelajaran PD, adalah membawa mahasiswa untuk berpikir secara matematis, tentang pemahaman fenomena alam semesta ini. Pemaparan fenomena alam semesta ke bahasa matematik, sering disebut sebagai "pemodelan". Pada bab ini istilah pemodelan ditukar menjadi "Aplikasi". Sebab istilah "pemodelan", memerlukan besic ilmu yang kompleks dalam menentukan variabel-variabel yang harus disertakan dalam analisis fenomena alam yang dipelajari. Sedangkan istilah "Aplikasi" hanya berkisar pada fenomena yang telah dibahas, namun masih memungkinkan dilakukan inovasi-inovasi, sesuai dengan perkembangan teknologi maupun kebutuhan manusia.

A. Pendahuluan

Persamaan differensial merupakan dasar penting untuk matematika teknik. Banyak hukum-hukum fisika dan teknologi yang dapat dinyatakan secara matematik terutama dalam bentuk persamaan differensial.

Pada bab ini dicoba untuk mengubah beberapa jenis masalah fisika, mekanika, elektronika, dan geometris ke dalam bentuk persamaan differensial dan berbagai metode penyelesaiannya. Secara khusus membentuk model untuk menentukan persamaan differensial sesuai dengan keadaaan fisis yang diberikan. Perubahan masalah fisis menjadi persamaan differensial disebut " pemodelan" (lihat bab satu). Prosedur ini sangat penting dalam ilmu teknologi dan fisika. Prosedur pemodelan lebih mudah dipahami dengan cara mengembangkan beberapa contoh dan penyelesaiannya.

B. Pertumbuhan dan Peluruhan

Laju peluruhan bahan radioaktif pada setiap waktu t ditentukan oleh perbandingan banyaknya radioaktif pada setiap waktunya. Demikian juga dengan laju pertumbuhan suatu bakteri di dalam larutan selalu sebanding dengan populasi bakteri pada setiap saat (waktu perhitungan).

Bila m menyatakan massa suatu unsur radio aktif pada waktu t, atau banyaknya populasi bakteri didalam suatu larutan pada waktu t, maka hubungan peluruhan atau pertumbuhan terhadap waktu itu dinyatakan oleh persamaan:

$$\frac{dm}{dt} = k.m.....(1)$$

dimana k sebagai faktor perbandingan, atau konstanta untuk zat tertentu.

Sebagai contoh: radium yang meluruh dengan mengeluarkan sinar alpa. Misalkan laju peluruhannya berbanding lurus dengan muatannya pada setiap saat t, dan 25% dari muatan awalnya hilang dalam waktu 664 tahun, berapa waktu paruh radium? (waktu paruh adalah waktu yang diperlukan agar muatan radio aktif berkurang menjadi separuh dari muatan awalnya, karena peluruhan).

Variabel m dan t pada persamaan (1) dapat ditulis

$$\int \frac{dm}{m} = k \int dt.$$

$$\ln m = k\,.\,t + \ln c$$

$$m(t) = c.e^{kt}$$

bila kondisi awal, pada saaat t = 0, muatan radio aktifnya sebanyak m_o, maka didapat c = m_1. Persamaan umumnya menjadi:

$$m(t) = m_o.e^{kt}$$

syarat bebas yang diketahui adalah pada saat t = 664 tahun, muatan radio aktif, tersisa menjadi 0,75 m_o persamaan menjadi:

$$0{,}75 m_o = m_o.e^{kt}$$

$$\ln 0{,}75 = 664k$$

$$k = -0{,}000433$$

persamaan khusunya menjadi:

$$m(t) = m_o.e^{-0{,}000433}$$

Selanjutnya, dengan memanfaatkan persamaan ini akan didapat waktu paruh radium sebagai berikut:

$$0{,}5m_o = m_o.e^{-0{,}000433}$$
$$\ln 0{,}5 = -0{,}000433t$$
$$t = 1600\,\text{tahun}$$

Jadi waktu paruh radium adalah 1600 tahun.

C. Perubahan Temperatur

Hukum Newton tentang pendinginan benda menyatakan bahwa, laju perubahan temperaur suatu benda pada setiap waktu t, berbanding lurus dengan perbandingan temperatur benda dengan temperatur di sekitarnya pada setiap waktu t. Ambil sebagai temperatur benda pada setiap saat t dan M temperatur disekitarnya (tetap) pada setiap saat t. Hukum Newton mengenai pendinginan atau pemanasan dinyatakan dalam bentuk persamaan differensial, yaitu:

$$\frac{dT}{dt} = k\,(T - M).....(2)$$

Dimana k sebagai konstanta perbandingan temperatur benda dari waktu ke waktu.

Contoh :

Bila temperatur disekitarnya 40^{o}C dan temperatur benda turun dari 170^{o}C menjadi 105^{o}C dalam waktu 45 menit. Berapa temperatur benda setelah 2 jam 15 menit.

Jawab

Karena temperatu disekelilingnya M = 40^{o}C tetap, maka persamaan (2) dapat ditulis $\dfrac{dT}{(T - 40)} = k\ dt$

Hasil integral : ln (T – 40) = k . t + ln C $\rightarrow$ ln (T – 40) = ln e^{kt} + ln c

Atau : T(t) = c . e^{kt} + 40 T – 40 = c.e^{kt}

Untuk mendapatkan C diketahui syarat batas pada saaat t = 0, T = 170^{o}C, didapat c = 130.

Persamaan menjadi:

$$T(t) = 130\ e^{kt} + 40 \quad \text{(jawaban umum)}$$

Syarat batas berikutnya adalah, pada saat t = 45 menit, T = 105^{o}C. substitusikan keadaan ini ke dalam persamaan, didapat:

$$105 = 130\, e^{kt} + 40$$

$$\ln \frac{65}{130} = 45\, k$$

$$k = 0{,}0154$$

Persamaan khususnya adalah, T(t) = 130 $e^{-0{,}0154\, t}$ + 40. Selanjutnya pada saat t = 135 menit, temperatur benda menjadi:

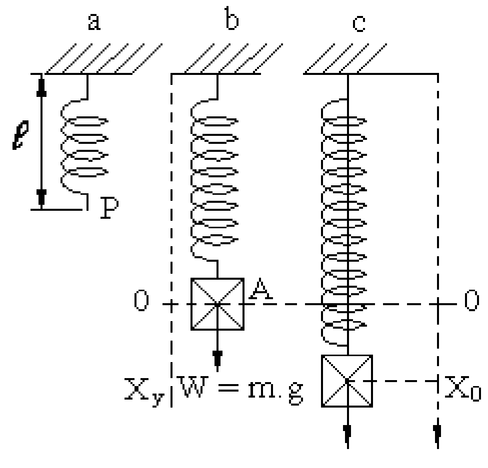
$$\begin{aligned} T(t) &= 130\,.\,e^{-0{,}0154.135} + 140 \\ &= 130\,.\,e^{-20{,}79} + 40 \\ &= 56{,}26\ ^{o}C \end{aligned}$$

e = 2,7183 bilangan pokok log natural.

Jadi temperatur benda setelah 2 jam 15 menit adalah 56,26^{o}C.

D. Getaran Pegas

Pegas spiral sepanjang l, tergantung pada penahan (gambar), menurut hukum hooke, tarikan atau tekanan sejauh s yang diberikan pada pegas tersebut menimbulkan gaya perlawanan F yang berbanding lurus dengan $|F| = k.s$, dimana k sebagai konstanta pegas, sesuai dengan bahan, ketebalan, dan bentuk pegas



Gambar 6.1 Getaran Pegas

Objek A seberat W = m . g, digantung dibagian bawah pegas dan dibiarkan sampai seimbang (b). Ambil sumbu koordinat vertikal dengan arah positif ke bawah dari garis horizontal titik 0, titik P ditarik ke bawah sejauh x_o lalu dilepas (c).

Ada dua jenis permasalahan gerakan titik p, yaitu; (1) gerakan harmonis sederhanan dan (2) getaran teredam.

1. Gerakan Harmonis Sederhana

Pada gerakan ini diasumsikan tidak ada tahanan udara atau gesekan pada sistem. Bila objek A yang ditarik (C) kemudian dilepas, ia akan bergerak kearah ke atas, melewati titik asal, karena adanya gaya Hooke sebesar F = -k . s.

Menurut hukum keseimbangan Newton F = m.a, dimana m = $\frac{W}{g}$ adalah massa dari objek A dan a percepatan dari gesekan serta g adalah percepatan gravitasi bumi, sehingga dapat ditulis :

$$m.a = -k.x$$

$$\frac{W}{g}.\frac{d^2x}{dt^2} = -k.x \qquad ....(1)$$

Merupakan persamaan differensial ordo dua dalam bentuk perubahan jarak terhadap waktu, setelah pegas dilepas dari tarikan. Persamaan dapat ditulis dalam bentuk: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k.g}{W}.x = 0$

Persamaan karakteristiknya adalah : $m^2 + \frac{k.g}{W} = 0$

Dengan akar – akar : $m_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-k.g}{W}}$

Bila $\sqrt{\frac{-k.g}{W}} = \pm Bi$, maka jawaban umumnya adalah :

$$x(t) = c_1 \cos Bt + c_2 \sin Bt$$

Dengan syarat batas, pada saat $t = 0;\ x = x_o$ dan $\frac{dx}{dt} = 0$

$$dan \quad \frac{dx}{dt} = -Bc_1 \sin Bt + Bc_2 \cos Bt$$

didapat: (1) $x_o = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 \rightarrow c_1 = x_o$

(2) $0 = -c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 \rightarrow c_2 = 0$

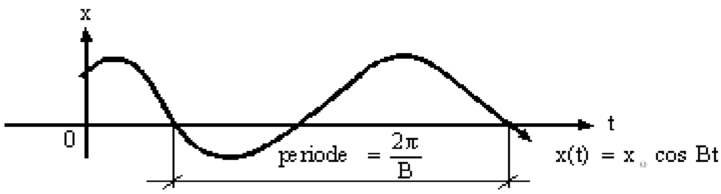
Didapat jawaban khusus untuk gerakan harmonis sederhana dalam bentuk :

$$x(t) = x_o \cos Bt$$

$$\text{dengan } B = \sqrt{\frac{kg}{W}}$$

Gerakan ini menyatakan gerakan naik turun berjarak x_o satuan dari titik 0. x_o dinyatakan sebagai amplitudo dari gerakan periodik dengan periode $\frac{2\pi}{B}$.

Persamaan gerak dengan persamaan tersebut di atas dinyatakan sebagai gerakan harmonis sederhana.



Gambar 6.2 gerakan Harmonis Sederhana

Contoh :

Objek bermassa 5 lb digantung pada pegas spiral vertikal, sehingga pegas bergerak sejauh 6 inch dan seimbang. Bila beban ditambah sebesar 20 lb dan dibiarkan sampai seimbang, kemudian ditarik sejauh 1 foot, lalu dilepaskan. Tentukanlah persamaan gerakan benda pada pegas tersebut (dengan asumsi tidak ada tahanan udara atau gerakan lainnya dalam sistem),

Jawab :

Ambil graviatsi g = 32 ft/sec^2 untuk mendapatkan k gunakan keadaan awal dengan beban 5 lb, pertambahan panjang $\frac{1}{2}$ ft ,

Jadi : $F = ks$

$$5 = k\,\tfrac{1}{2} \rightarrow k = 10\ \text{lb}/\text{ft}$$

Persamaan gerakan untuk beban tambahan 20 lb, dengan k = 10 dan g = 32 adalah:

$$\frac{W}{g}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+10x=0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{32.10}{20}x=0$$

Persamaan karakteristik:

$$m^2+16x=0$$

$$m_{1,2}=\pm 4i$$

Jawaban umum PD nya adalah $x(t) = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t$

Syarat batas pada saat t = 0, x = 1 dan v = $\frac{dx}{dt}=0$

$$(1) \quad 1=c_1\,1+c_2\,.0\rightarrow c_1=1$$

$$(2) \quad \frac{dx}{dt}=-4c_1\,\sin 4x+4\,c_2\,\cos 4x$$

$$0=-4\,c_1\,.0+4\,c_2\,.1\rightarrow c_2=0$$

Jadi persamaan geseknya adalah : $x(t)=\cos 4t$

Gerakan titik P adalah gesekan harmonis sederhana dengan periode $\frac{1}{2}\pi$ = 1,57 detik dan amplitudo 1 ft di bawah titik 0. Titik P bergerak naik turun dari 1 ft di bawah titik 0 ke 1 ft di atas titik 0 dan kembali ke titik 0 setiap 1,57 detik.

2. Getaran Teredam

Pada kenyataannya setiap gerakan selalu mengalami tahanan dan gesekan pada sistemnya, sehingga gerakannya menjadi tidak harmonis sederhana. Pada umumnya hambatan yang terjadi akan meredam kecepatan sesaatnya. Arah gaya yang meredam berlawanan dengan arah gerakan benda.

Menurut hukum Hooke dapat ditulis persamaan gerak dalam bentuk:

$$F=-k\,x-q\,v$$

$$\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=-k\,x-q\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{gq}{W}\frac{dx}{dt}+\frac{kg}{W}x=0$$

Dimana q hambatan positif dan v = $\frac{dx}{dt}$, kecepatan dari patikel. Harga –q v menyatakan gaya perlambatan. Bila diambil B^2 = $\frac{k\,g}{W}$ dan E = $\frac{g\,q}{W}$ persamaan menjadi:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + E\frac{dx}{dt} + B^2\,x = 0$$

Persamaan ini merupakan persamaan differensial homogen ordo dua, dengan persamaan karakteristik :

$$m^2 + E\,m + B^2 = 0$$

Ada 3 alternatif (kasus) jawaban yang berhubungan dengan harya $E^2 – 4B^2$, yaitu positif, negatif dan nol.

Kasus 1 ($E^2 – 4B^2 < 0$)

Harga akar-akarnya bilangan kompleks yaitu $m_{1,2}$ = $\alpha \pm \beta i$, jawaban umumnya adalah x(t) = $e^{-\alpha t}$ (c_1 sin βt + c_2 cos βt) atau $y(t) = c.e^{-\alpha t}\sin(\beta t + \gamma)$.

Faktor $e^{-\alpha t}$ dinyatakan sebagai faktor redaman. Pada umumnya $\alpha < 0$, $\lim_{t\to\sim} e^{-\alpha t} = 0$

Persamaan ini disebut sebagai gerakan harmonis teredam. Amplitudo adalah $c\,e^{-\alpha t}$, yang didekati nol pada saat $t \to \sim$.

Kasus 2 ($E^2 – 4B^2 = 0$)

Pada kasus ini harga akar-akar persamaan karakteristiknya sama. Bila dinyatakan dengan α, maka jawaban umum dari persamaan differensial adalah:

$$X(t) = (c_1 + c_2\,t)\; e^{-\alpha t}$$

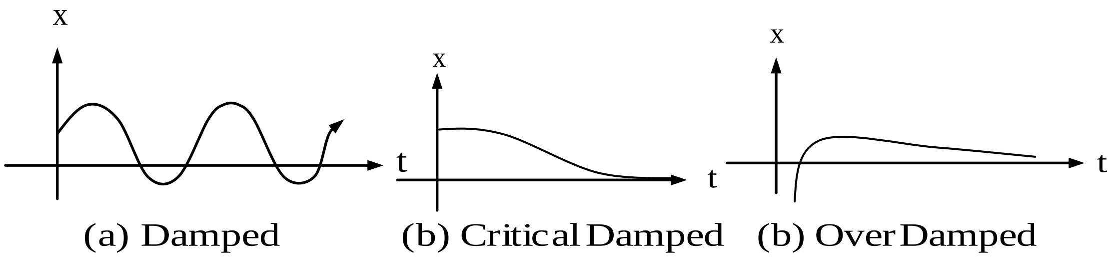
Persamaan gerakan yang dinyatakan oleh persamaan ini adalah “redaman kritis” gerakannya bukan getaran.

Kasus 3 ($E^2 - 4B^2 > 0$)

Harga akar-akar persamaan karakteristiknya real dan berbeda. Bila dinyatakan dengan $-\alpha_1$ dan $-\alpha_2$, maka jawaban umum untuk persamaan differensial adalah:

$$x(t) = c_1\, e^{-\alpha t} + c_2\, e^{-\alpha t}$$

gerakan dengan persamaan ini dinyatakan sebagai “over redaman” juga bukan merupakan getaran..



Gambar 6.3 Gerakan Over Redaman

Contoh :

Bila gaya redaman sebesar 0,2 $|v|$ diberikan pada sistem gerakan contoh terdahulu, maka persamaan differensial yang diperoleh untuk gerakan titik p menjadi:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 0{,}32\,\frac{dt}{dx} + 16x = 0$$

dengan akar-akar persamaannya:

$m_{1,2}$ = - 0,16 $\pm \sqrt{15{,}97}$

= - 0,16 $\pm$ 4i

Jawaban umumnya adalah x(t) = $e^{-0{,}16t}$ (c_1 sin 4t + c_2 cos 4t) untuk syarat batasan, t = 0, x = $\frac{1}{2}$, dan $v = \frac{dx}{dt} = 0$ didapat:

$$(1).\ \frac{dx}{dt} = e^{-0{,}16t}\left[(4c_1 - 0{,}16c_2)\cos 4t - (4c_2 + 0{,}16c_2)\sin 4t\right]$$

$$0 = 1(4c_1 - 0{,}16c_2)$$

$$c_1 = 0{,}04c_2 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

(2). $x(t) = e^{-0,16t}(c_1 \sin 4t + c_2 \cos 4t)$

$\frac{1}{2} = 1(c_1 .0 + c_2 .1)$

$c_2 = 0,5$

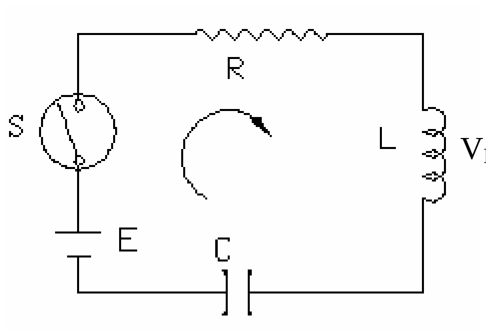
Dari (1), didapat $c_1 = 0,5 . 0,04 = 0,02$.

Persamaan menjadi $x(t) = e^{-0,16t}(0,02 \sin 4t + 0,5 \cos 4t)$. gerakan titik p sangat lambat. Gerakan harmonis diredam dengan faktor redaman $e^{-0,16t}$ dan periode kira-kira $\frac{1}{2}\pi = 1,57$ detik .

E. Rangkain Elektrik

Kebanyakan rangkaian listrik dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan differensial linier, Gambar berikut menunjukan suatu rangkaian yang terdiri dari gaya gerak listrik E (batu baterai atau generator, resistor R, induktor L, kondensor c, dan saklar s yang dihubungkan secara seri.

$V_R = i.R$



$V_L = L.\frac{di}{dt}$.

$V_c = \frac{1}{c}.q$

Gambar 6.4 Rangkaian RCL

RCL menggunakan energi yang diberikan oleh ggl E. Resistor menggunakan energi untuk mengatasi tahanan arus listrik yang melewatinya sama seperti geseran aliran air di dalam pipa saluran. Energi yang digunakan oleh resistor sebesar $V_R = I . R$ yang diukur dengan satuan ohm (Ω).

Induktor digunakan untuk menstabilkan aliran arus listrik, dengan cara menaikkan atau menurunkan arus, dengan cara menambah atau mengurangi energi listrik, enegi yang digunakan oleh induktor sebesar $V_I = L\,\frac{di}{dt}$.

Condensor, biasa disebut kapasitor terdiri dari pelat-pelat yang terisolasi, gunannya untuk menyimpan muatan partikel. Energi yang digunakan oleh condenser sebesar $V_c = \frac{I}{c}.q$

Dimana notasi-notasi yang digunakan adalah:

q = muatan listrik diukur dengan satuan coulomb (C)

t = waktu dalam detik

i = arus listrik, diukur dengan satuan ampere (A)

e = elektromotive force (ggl) diukur dengan volt (v)

C = capasistance dalam farad (F)

R = tahanan dalam ohm (Ω)

L = koefisien induktansi dalam hendri (H).

Hukum Kirchoff kedua (hukum voltase) mengatakan bahwa: “ Pada rangkaian tertutup, jumlah voltase (energi listrik seluruh elemen yang terpasang), sama dengan jumlah voltase yang dikeluarkan oleh elektromotive force E(t) pada tiap waktunya”.

Untuk rangkaian pada gambar RCl yang dilayani oleh elektromotive E(t) dan saklar s. Hukum Kirchoff yang dibuat dalam persamaan differensial adalah:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E(t).....(1)$$

untuk mendapatkan I pada tiap waktu t, substitusikan $i = \frac{dq}{dt}$ ke dalam (1) dan didapat:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}E(t).....(2)$$

Ini adalah PDL non homogen dengan jawaban umum dapat dicarikan dalam bentuk q sebagai fungsi t. Turunan dari jawaban ini terhadap t menghasilkan

$i = \frac{dq}{dt}$. Bentuk ini dapat digunakan untuk menyatakan arus I sebagai fungsi t dengan cara mendifferensialkan (1) kearah t, ingat bahwa $\frac{dq}{dt} = \text{i atau } q = \text{i.t.}$.

Didapat: $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{RL}.i = \frac{1}{L}\frac{d}{dt}\left(E(t)\right)$

Jawaban umum dari persamaan ordo dua non homogen ini menyatakan i sebagai fungsi t (kuar arus terhadap waktu).

Contoh 1

Hitunglah arus I sebagai fungsi t, setelah saklar ditutup pada rangkaian RCL terdiri dari resistor, kondensor, dan konduktor, baterai =12 volt dan saklar (s) yang dihubungkan secara seri. Bila R = 16 (Ω), L = 0,02 h dan C = 2 . 10^{-4} F.

Jawab :

Hukum Kirchoff kedua : $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}E(t)$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{16}{0,02}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{0,02.\,2.10^{-4}}q = \frac{1}{0,02}.12$$

$$(D^2 + 800D + 250.000)q = 600$$

PD ordo dua dengan jawaban umum.

- Fungsi komplementer dengan persamaan karakteristik

  [m – [(-400 + 300i)] [m-(-400+300i)] = 0

  $m_{1,2} = -400 \pm 300i$

  Jadi $q_e = e^{-400\,t}$ (c_1 sin 300 t + c_2 cos 300 t)

- Integral khusus dengan memisalkan q_p = A . q'_p = 0 subsitusikan ke dalam persamaan didapat:

  0 + 0 + 250.000 A = 600

  A = $2,4.10^{-3}$

Didapat jawaban umum $q(t) = e^{-400\,t}$ (c_1 sin 300 t + c_2 cos 300 t) + $2,4.10^{-3}$

Syarat batas:

$$\left.\begin{aligned} & t = 0 \\ & q = 0 \\ & \frac{dq}{dt} = i = 0 \end{aligned}\right\} \text{(a)}\ \ 0 = 1(c_1.0 + c_2.1) + 2{,}4.10^{-3}$$

$$\begin{aligned}
\text{(b)}\ \ \frac{dq}{dt} &= -400e^{-400t}(c_1 \sin 300t + c_2 \cos 300t) \\
&\quad + e^{-400t}(300c_1 \sin 300t - 300c_2 \cos 300t) \\
0 &= -400(c_1.0 + c_2.1) + (300c_1.1 - 300c_2.0) \\
0 &= -400c_2 + 300c_1 \\
300c_1 &= -400(-2{,}4.10^{-3}) \\
c_1 &= -3{,}2.10^{-3}
\end{aligned}$$

jadi $q(t) = -e^{-400t}\left(3{,}4.10^{-3} \sin 300t + 2{,}4.10^{-3} \cos 300t\right)$ sebagai persamaan muatan q terhadap waktu t.

$I(t) = 2e^{-400t} \sin 300t$ sebagai persamaan kuat arus I terhadap waktu t.

Contoh 2

Rangkaian terdiri dari resistor R, induktor L dan pembangkit listrik sinusoidal E(t) = k.sin.wt. bila pada saat saklar ditutup t = 0 terdapat E(t) = 0 tentukanlah persamaan kuat arus.

Jawab :

Menurut hukum Kirchoff kedua :

$$L\frac{di}{dt} + Ri = k.\sin\omega t$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{K}{L}\sin\omega t \qquad - e^{\frac{Rt}{L}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(i.e^{\frac{Rt}{L}}\right) = \frac{K}{L}\sin\omega t.e^{\frac{Rt}{L}}$$

$$i.e^{\frac{Rt}{L}} = \frac{K}{L}\int \sin\omega t.e^{\frac{Rt}{L}}\,dt + c$$

$$i(t) = ce^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{K}{M^2}(R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t)$$

dimana: $M = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$, dan c sebagai konstanta.

Dari keadaan awal t = 0, i = 0 didapat $c = \frac{K\,L\,\omega}{M^2}$ sehingga:

$$i = \frac{K}{M^2}(L\;W.\,e^{-\frac{Rt}{L}} + R\sin\omega t - LW\cos\omega t)$$

merupakan kuat arus I pada saat t > 0. Catatan, untuk t terus bertambah $e^{-\frac{Rt}{L}}$ mendekati nol. Sehingga untuk t yang besar $e^{-\frac{Rt}{L}}$ dapat diabaikan.

Hal ini menyebabkan persamaan menjadi dua bagian, yaitu $i = i_T + i_S$. dimana:

$$i_T = \frac{K\,L\,W}{M^2}\left(R\sin\omega t - LW\cos\omega t\right) \text{ sebagai transien current}$$

$$i_S = \frac{K}{M^2}\left(R\sin\omega t - LW\cos\omega t\right) \text{ sebagai steady state current}$$

F. Mekanika

Hukum dasar mekanika adalah hukum Newton $F = \frac{d}{dt}(mv)$, dimana m sebagai massa benda yang bergerak, v kecepatan, t waktu dan F gaya penyebab gerakan benda. Karena massa benda konstan, maka persamaan dapat ditulis:

$$F = m.\frac{dv}{dt} = m.\frac{d^2t}{ds^2} = m.a$$

dengan s jarak tempuh gerakan, a percepatan di atas permukaan bumi. Massa m dipengaruhi oleh gravitasi dan menghasilkan gaya berat sebesar W = m . g. Sistem satuan yang digunakan dalam membahas mekanikan adalah:

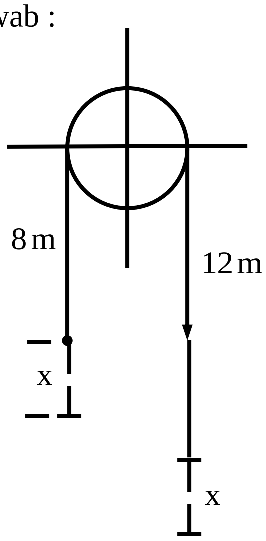
1. CGS (cm, grm, sec). Bila m dalam gram, maka a dalam ${}^{cm}/_{sec^2}$, sehingga F dalam dyne $\left({}^{grm.cm}/_{sec^2}\right)$.
2. MKS (m, kg, sec). Bila m dalam kg, maka a dalam ${}^{m}/_{sec^2}$ sehingga F dalam Newton $\left({}^{kg.m}/_{sec^2}\right)$.

3. FPS (ft, lb, sec). Bila m dalam lb, maka a dalam ${ft}/{sec^2}$, sehingga F = m . a = ${ft}/{sec^2}$, sehingga F = m . a = $\frac{W}{g}$.a dalam lbf. Di atas bumi g = $32\ {ft}/{sec^2}$ $= 9{,}81\ {m}/{dt^2} = 981\ {cm}/{dt^2}$.

Contoh :

Tali bermassa m tergantung pada pasak pada tiap sisinya. Hitung waktu agar tali lepas dari pasak bila (a) gesekan diabaikan dan (b) gesekan yang terjadi antara pasak dan tali sama dengan berat satu meter tali, g = 10 ${m}/{det^2}$.

Jawab :



a. Massa total tali m kg bila tiap waktu t detik tali bergerak sejauh x m ke arah tali terpanjang maka keadaan distribusi gaya adalah:

$$F = (12 + x)\ \frac{m.g}{20} - (8 - x)\ \frac{m.g}{20}$$

$$m.a = 6m + \tfrac{1}{2}\ m.x - 4m + \tfrac{1}{2}\ m$$

Bagi persamaan dengan m dan nilai $a = \frac{d^2x}{dt^2}$, maka dapat ditulis: $\frac{d^2x}{dt^2} - x = 2$

Adalah (PD) ordo dua tak homogen dengan solusi:

1) Fungsi komplementer dengan persamaan karakteristik

$$m^2 - 1 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} m_1 = 1 \\ m_2 = -1 \end{matrix}\right\} \text{sehingga}\ x_c = c_1\ e^{t} + c_2\ e^{-t}$$

2) Integral khusus dengan memisalkan x_p = A; x_p''= 0 substitusikan ke dalam persamaan didapat:

$$0 - A = 2$$

$$A = -2 \rightarrow x_p = 2$$

Jawaban umum PD adalah: $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - 2$

Dengan syarat batas:

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ x = 0 \\ \dfrac{dx}{dt} = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} (1)\ \ 0 = c_1 .1 + c_2 .1 - 2 \rightarrow c_1 + c_2 = 2 \\ (2)\ \ x^1(t) = c_1 e^t + c_2 e_2^{-t} \\ \qquad 0 = c_1 + c_2 \rightarrow c_1 = c_2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{array}$$

Jadi persamaan gerak tali adalah : $x(t) = e^t + e^{-t} - 2$

Tali akan lepas dari pasak jika x = 8 jadi,

$$8 = e^t + e^{-t} - 2$$

$e^t + e^{-t} = 10 \rightarrow$ ingat coch $t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$, persamaan dapat ditulis;

$$2\cosh t = 10$$

$$\cosh t = 5$$

$t = \cosh^{-1} 5$; dari kalkulator didapat: $t = 2{,}29$ detik

Jadi, waktu agar tali lepas dari pasak adalah 2,29 detik.

Cara lain :

Dari persamaan: $\dfrac{e^t + e^{-t} = 10}{e^{2t} + 1 = 10e^t}\, x e^t$

$$e^{2t} - 10e^t + 1 = 0$$

$$e^t_{1.2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{6} = 5 \pm 4{,}899$$

$(1)\, e^t = 9{,}899 \rightarrow t = \ln 9{,}899 = 2{,}29$ (benar)

$(2)\, e^t = 0{,}101 \rightarrow t = \ln 0{,}101 = -2{,}29$ (tidak benar)

b. Bila gaya gesek penahan $\dfrac{mg}{20}$, maka persamaan menjadi

$$F = (2 + x)\frac{mg}{20} - (8 - x)\frac{mg}{20} - \frac{mg}{20}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = \frac{3}{2}$$; seperti jawaban di atas,

didapat $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \frac{3}{2}$

Syarat batas :

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ x = 0 \\ \frac{dx}{dt} = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 0 = c_1.1 + c_2.1 - \frac{3}{2} \rightarrow c_1 + c_2 = \frac{3}{2} \\ x(t) = c_1 e^t + c_2 + e^{-t} \\ 0 = c_1 - c_2 \rightarrow c_1 \text{ - } c_2 \end{array}\right\} c_1 = \frac{3}{4}, c_2 = \frac{3}{4}$$

jadi $x(t) = \frac{3}{4}\ e^t + \frac{3}{4} e^{-t} - \frac{3}{2}$

Tali lepas dari pasak jika x = 8, jadi :

$$8 = \frac{3}{4} e^t + \frac{3}{4} e^{-t} - \frac{3}{4}$$

$$e^t + e^{-t} = \frac{38}{3}$$

$$2 \cosh t = \frac{38}{3}$$

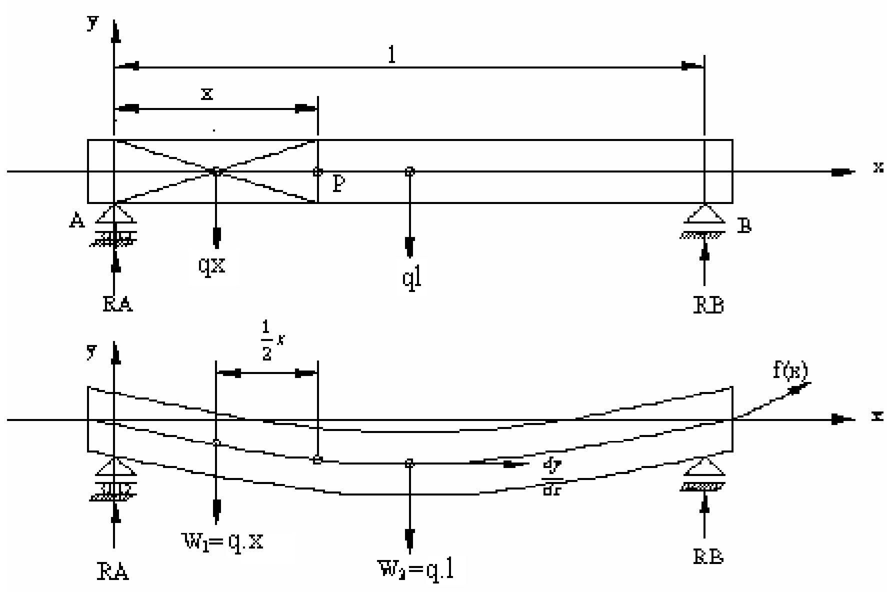
$$t = \cosh^{-1} \frac{38}{6}$$

$$t = 2{,}53 \text{ detik}$$

jadi, waktu agar tali lepas dari pasak adalah 2,53 detik.

G. Lendutan Balok Horizontal

Sebatang balok yang ditumpu pada kedua sisinya akan mengalami lendutan (defleksi) karena beban beratnya sendiri atau beban lainnya. Dengan asumsi bahwa bahan dan bentuk balok uniform dengan serat-serat memanjang. Konsentrasi gaya berat beban merata q N/m, dari balok tersebut terpusat dititik berat (center of gravity).



Gambar 6.5 Lengkungan f(x), Akibat Beban Merata

Serat-serat balok yang semula sejajar dengan sumbu datar menjadi melentur karena beban gaya berat. Lenturan maksimum terjadi pada titik berat balok (di tengah-tengah). Serat-serat balok membentuk suatu kurva f(x) dalam sistem koordinat sumbu xy. Oleh karena itu perlu dicari bentuk persamaan matematika dari f(x).

Dengan mengambil titik pandang, irisan balok pada jarak x (titik P) dari salah satu tumpuan (disini diambil titik A). Menurut mekanika, momen yang terjadi terhadap titik P, dari seluruh gaya yang bekerja pada balok dan sistemnya (a) tidak bergantung pada bagian pandangan potongan dan (b) momen yang terjadi dinyatakan dengan $\frac{E.I}{R} = Mp.....(1).$

Dalam hal ini E = modulus elastis [N/m^2] dan I = momen inersia irisan balok [m^4] dan R = jari-jari kelengkungan [m], (kurva elastis) dititik P, dan Mp momen terhadap titik P [N m]. Untuk mempermudah bahasan, ambil koordinat titik P(x, y) Karena koefisien arah kurva f(x) adalah dy/dx di semua titik dan jari-jari R adalah

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

karena secara mekanik $\frac{dy}{dx}$ sangat kecil dan $\frac{dy}{dx} = 0$ bila defleksi maksimum, maka pada keadaan ini dapat diambil:

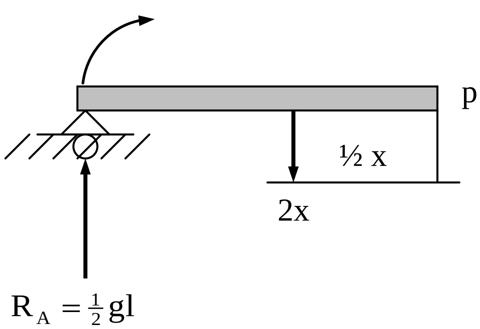
$$\mathbf{R = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}}$$

dengan demikian persamaan (1) menjadi:

$$E.I.\frac{d^2y}{dx^2} = Mp.....(2)$$

Bila beban merata balok q N/m, panjang balok L meter maka gaya vertikal pada tumpuan A dan B masing-masing $R_A = R_B = \frac{1}{2}$ q l [N]. Gaya berat balok sepanjang x adalah W = q x.

Dengan demikian momen gaya pada titik p adalah:



$$Mp = \tfrac{1}{2}qlx - qx\tfrac{1}{2}x^2$$
$$= \tfrac{1}{2}qlx - \tfrac{1}{2}qx^2$$

Gambar 6.6 Momen dengan Gaya Di titi P

Selanjutnya (2) menjadi: $.E\,I = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2$ merupakan persamaan differensial ordo dua yang dapat diselesaikan dengan integral langsung dan syarat batas x = 0; y = 0 dan $\frac{dy}{dx} = 0$; pada saat $x = \frac{l}{2}$ akan didapat:

$$y(x) = \frac{q}{24\,E.I}\left(x^4 - 2lx^3 + l^3x\right)$$

sebagai persamaan lendutan balok.

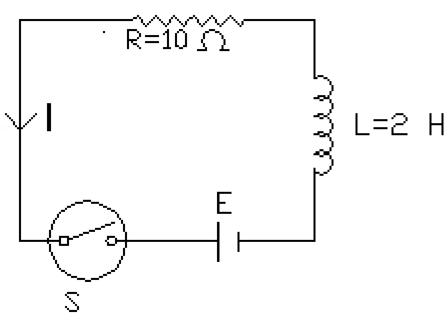
Lendutan maksimum terjadi bila $x = \frac{l}{2}$ sehingga

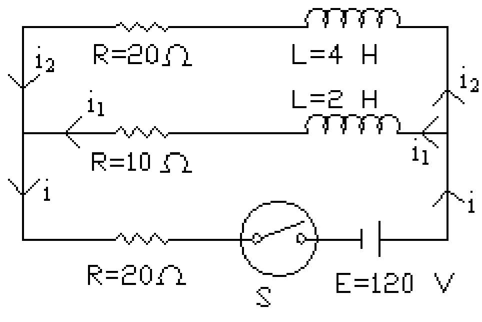
$$y_{\max} = \frac{q}{E.I.24}\left(\frac{l^4}{16} - 2.l.\frac{l^3}{8} + l^3x\right)$$

$$= \frac{5gl^4}{384E.I}$$

Soal-soal :

1. Jika Laju pertumbuhan karat di permukaan plat logam sebanding dengan luas A(t) pada tiap waktu dan luas tersebut menjadi dua kali lipat dalam satu minggu, berapa kali lipat luas karat tersebut setelah satu tahun (52 minggu).
2. Bila waktu paruh uranium 92 U^{232} selama 74 tahun. Berapa persen yang tersisa setelah 1 tahun, 10 tahun dan 50 tahun?
3. Termometer terbaca 15^oC. satu menit kemudian termometer tersebut menunjukan angka 19^oC. Berapa lama waktu yang diperlukan agar termometer tersebut menunjukan angka 24,9 ^oC.
4. Besi rongsokan bertemperatur 30 ^oC dimasukan ke dalam tanur listrik, 20 menit kemudian temperaturnya menjadi 150 ^oC. bila temperatur pengecoran 1200 ^oC, berapa lama proses pencairan besi tersebut di dalam tanur listrik. Tempelatur udara saat itu 27^0C.
5. Sebuah benda dilempar vertikla ke atas dengan kecepatan awal v_o. Buktikan bahwa waktu tempuh benda sampai kembali dua kali waktu tempuh untuk mencapai titik tertinggi. Tentukan kecepatan saat kembali ke tempat semula.

6. Objek seberat 20 N digantung pada bagian bawah pegas spiral, sehingga meregang sejauh 9,8 cm setelah keadaan seimbang, beban tersebut ditarik kebawah sejauh 5 cm, diukur dari dalam keadaan diam setelah dibebani. Tentukanlah persamaan gerakan yang dihasilkan dengan asumsi tidak ada gesekan dan hambatan udara.
7. Bila gaya redaman diberikan pada soal 6, sebesar 0,1 $|v|$, tentukanlah persamaan geraknya.
8. Sebuah pegas dengan k = 700 N/m tergantung vertikal dengan ujung atasnya tetap. Objek bermassa 7 kg digantungkan pada ujung bawah, setelah seimbang obyek tersebut ditarik ke bawah sejauh 5 cm dan dilepaskan. Tentukan persamaan gerak yang terjadi, bila gesekan diabaikan.
9. 

Resistor R = 10ohm, inductor L = 2 hendri dan baterai E volt dihubungkan secara seri oleh saklar s. Pada saat t = 0 saklar ditutp, kuat arus I = 0. tentukan persamaan arus I pada saat t > 0, bila (a) E = 40; (b) E = 20 e^{-3t} dan (c) E = 50 sin 5t.
10. Resistor R=5 ohm dan condensor c = 0,02 farad disambung secara seri dengan baterai E = 100 volt. Bila pada saat t = 0 tersapat muatan sebesar 5 coulomb pada kondensor. Tentukan banyaknya muatan dan kuat arus pada t > 0.
11. 

Tentukan kuat arus yang mengalir pada tiap cabang, bila rangkaian electrik seperti gambar di samping.

12. Suatu jaringan listrik tersiri atas inductor 0,05 H, resistor 20 ohm, condensator dengan 100 microfarad dan ggl sebesar E = 100 volt. Tentukan kuat arus I dan banyaknya muatan q, jika pada saat t = 0, I = 0 dan q = 0.
13. Tali tergantung pada pasak dengan panjang masing-masing 10 dan 15 m pada tiap sisinya. Bila massa tali m kg tiap meternya, tentukanlah waktu agar tali lepas dari pasak bila (a) tanpa ada gesekan dan tahanan udara, (b) gesekan antara tali dengan katrol sama dengan berat tiap meter tali.
14. Tangki air berbentuk silinder setinggi h meter, terisis air penuh, luas penampang tangki A m^2, bila di dasar tangki diberi lubang seluas a cm^2, tentukanlah waktu agar air dalam tangki keluar setengahnya. Berapa lama agar tangki itu menjadi kosong?
15. Balok horizontal sepanjang l, dijepit pada saat salah satu sisinya dan sisi lainnya bebas. Carilah persamaan kurva lendutannya. Hitung defleksi maksimum yang terjadi, bila beban meratanya sebesar q N/m.
16. balok horizontal sepanjang l, ditumpu pada kedua sisinya. Carilah persamaan lendutannya dan lendutan maksimum jika di tengah-tengahnya diberi beban q N dan beban merata balok q N/m.
17. Perahu ditarik dengan kecepatan 20 km/jam. Pada saat t = 0 alat penarik dilepas. Orang yang ada di atas perahu mulai mendayung searah dengan gerakan, dengan gaya 90 N. Jika massa orang dan perahu 225 kg dan hambatan yang dialami perahu 26,25 v [m/det]. Carilah kecepatan perahu setelah 30 detik.
18. Suatu benda bergerak pada garis lurus, sehingga kecepatan awalnya menjadi 2 kali lebih besar dari jarak tempuhnya pada garis itu. Tentukan persamaan geraknya jika pada saat t = 0, v = 5 m/det.