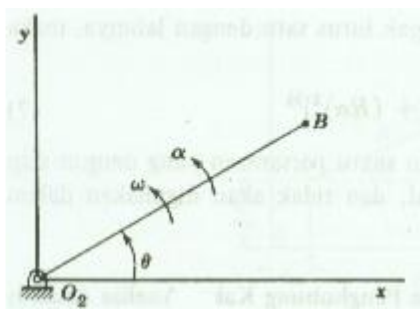
BAB 6

PERCEPATAN RELATIF

Dalam analisa percepatan, dapat dijumpai tiga situasi yang telah dibahas dalam analisa kecepatan : (1) hubungan perceptana dua buah titik yang berbeda dan terpisah, (2) hubungan percepatan dua buah titik pada satu penghubung kaku dan (3) hubungan percepatan sebuah titik ke suatu badan, dimana titik bergerak terhadap badan.

6-1. Percepatan Sebuah Titik Pada Sebuah Penghubung Yang Berputar Terhadap Satu Pusat Tetap Dengan Suatu Jari-Jari Konstan. Analisa Analitis



Sebuah penghubung, seperti ditunjukan dalam gambar diatas, berputar terhadap satu pusat tetap, O_2, dengan suatu sudut kecepatan sudut ω radian perdetik, kearah melawan putaran jam, percepatan sudut α. Jarak antara O_2 dan B ditentukan R. Garis O_2-B membuat sudut dengan sumbu x. Diinginkan percepatan total B.

Seperti yang ditunjukan dalam bab 3, halaman 10, kecepatan titik B dalam arah-arah x dan y diberikan oleh

$$V_B^x = -R\omega \sin\theta$$

$$V_B^y = R\omega \cos\theta$$

Diferensiasi kedua persamaan terhadap waktu dan mengingat bahwa R adalah konstan, memberikan:

$$\frac{dV_B^x = R\omega \cos\theta}{dt} = -R \left[\omega(\cos\theta) \frac{d\theta}{dt} + \sin\theta \frac{d\omega}{dt} \right]$$

$$\frac{dV_B^y = R\omega \cos\theta}{dt} = R \left[\omega(-\sin\theta) \frac{d\theta}{dt} + (\cos\theta) \frac{d\omega}{dt} \right]$$

Tuliskan,

$$\frac{dV_B^x}{dt} = A_B^x\text{, percepatan titik } B \text{ dalam arah x}$$

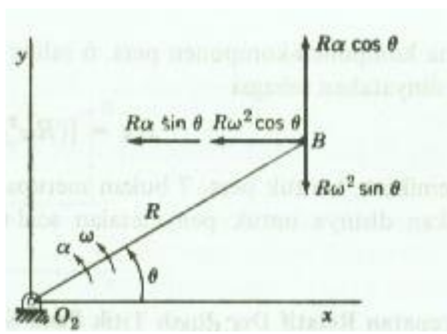
$$\frac{dV_B^y}{dt} = A_B^y\text{, percepatan titik } B \text{ dalam arah y}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = A_B^y\text{, percepatan titik } B \text{ dalam arah y}$$

Sehingga pers. 1 dan 2 menjadi:

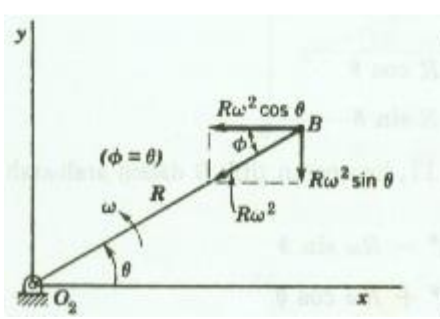
$$A_B^x = -R\omega^2 \cos\theta \ - R\alpha \sin\theta$$

$$A_B^y = -R\omega^2 \sin\theta \ - R\alpha \cos\theta$$

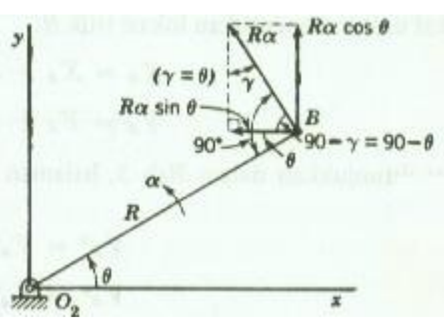


Gambar diatas memperlihatkan vector-vektor dalam posisinya, tanda-tanda plus dan minus diambil dengan memperhatikan arah vector. Dalam mendapatkan percepatan total titik *B*, urutan dalam penjumlahan vektornya boleh sembarang. Mari kita nyatakan percepatan total titik *B* sebagai

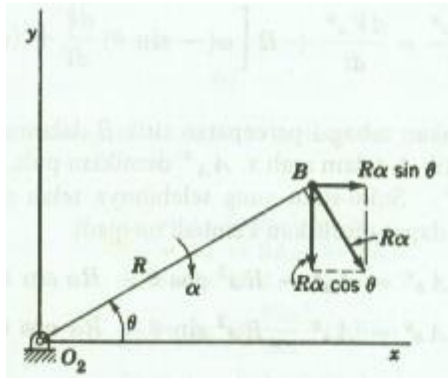
$$A_B = (R\omega^2 \cos\theta \nleftrightarrow R\omega^2 \sin\theta\,) \ \ (R\alpha \sin\theta \nleftrightarrow R\alpha \cos\theta)$$



Gambar 6-1a



Gambar 6-1b



Gambar 6-1c

Kedua komponen tegak lurus dalam tanda kurung pertama, yang ditunjukan Gambar 6-1a, memberikan satu resultante yang sama dengan $R\omega^2$, yang dapat ditunjukan mempunyai arah dari titik B ke pusat titk perputaran penghubung. Dua komponen tegak lurus dalam tanda kurung kedua, yang ditunjukan dalam gambar 6-1*b*, memberikan satu resultante yang sama dengan $R\alpha$, ynag dapat ditunjukan tegak lurus ke garis B-O_2 dan arahnya sesuai dengan arah percepatan sudut penghubung. Gambar 6.1*c* menunjukan pengaruh pembalikan arah percepatan sudut. Catat bahwa $R\omega^2$ adalah sebuah vektor yang merupakan fungsi dari harga numeric kecepatan sudut namun tidak bergantung pada arah putaran penghubung.

Sehingga percepatan total titik B dapat dinyatakan dengan,

$$A_B = R\omega \nrightarrow R\alpha$$

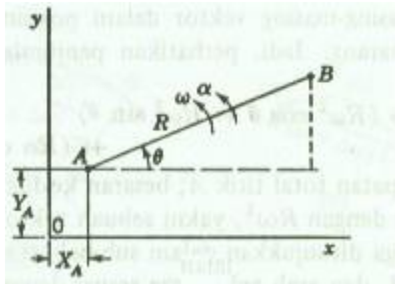
Dimana $R\omega^2$ disebut komponen percepatan normal atau radial dan $R\alpha$ disebut komponen percepatan tangensial. Catat bahwa kecepatan sudut harus dinyatakan sebagai radian per waktu satuan, seperti radian perdetik dan percepatan sudut harus dinyatakan dengan radian per waktu satuan, seperti raian per detik.

Karena komponen-komponen pers.6 saling tegak lurus satu dengan lainnya, maka A_B dapat dinyatakan sebagai

$$A_B = [(R\omega^2)^2 + (R\alpha)^2]^{1/2}$$

Namnun demikian, bentuk pers. 7 bukan merupakan suatu persamaan yang dengan siap menyediakan dirinya untuk penyelesaian soal-soal dan tidak akan digunakan dalam buku ini.

6-2 Percepatan Relatif Dua Buah Titik Pada Satu Penghubung Kaku. Analisa Analitis



Perhatikan sebuah garis *A*-*B* dalam gambar diatas. Yang merupakan bagian dari sebuah penghubung kaku yang bergerak dalam suatu bidang dengan suatu gerak sembarang. Satu system sumbu koordinat akan dipakai untuk menentukan lokasi dititik *B*.

$$X_B = X_A + R\cos\theta$$

$$Y_B = Y_A + R\sin\theta$$

Diferensiasi dari persamaan-persamaan diatas dengan mengingat bahwa besaran konstanta hanyalah *R*, memberikan

$$\frac{dV_B^x}{dt} = \frac{dV_A^x}{dt} - R\left[\omega(\cos\theta)\frac{d\theta}{dt} - (\sin\theta)\frac{d\omega}{dt}\right]$$

$$\frac{dV_B^y}{dt} = \frac{dV_A^y}{dt} + R\left[\omega(-\sin\theta)\frac{d\theta}{dt} + (\cos\theta)\frac{d\omega}{dt}\right]$$

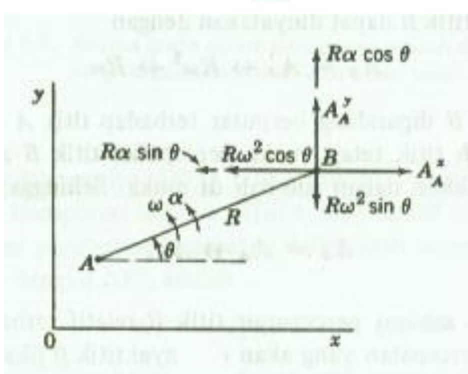
Maka persamaan dapat dituliskan kembali menjadi:

$$A_B^x = A_A^x - R\omega^2\cos\theta - R\alpha\sin\theta$$

$$A_B^y = A_A^y - R\omega^2\sin\theta - R\alpha\cos\theta$$

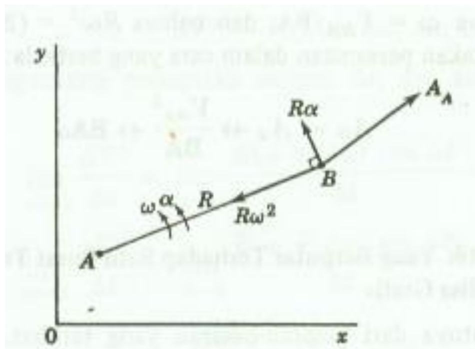
Percepatan total titik *B*, A_B, diperoleh dengan penjumlahan kedua komponen lurus:

$$A_B = A_B^x \;+\!\!\!\!\!\rightarrow\; A_B^y$$



Gambar diatas memperlihatkan masing-masing vector dalam posisinya. Urutan dalam penjumlahan vector adalah sembarang. Jadi, perhatikan penjumlahan vector-vektor sebagai berikut:

$$A_B = (A_A^x \nrightarrow A_A^y) \quad (R\omega^2 \cos\theta \nrightarrow R\omega^2 \sin\theta) \nrightarrow (R\alpha \sin\theta \nrightarrow R\alpha \cos\theta)$$

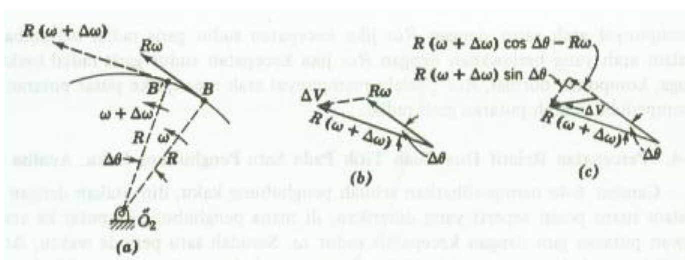


Gambar diatas memperlihatkan vetor-vektor dalam posisinya.

Dengan mencatat bahwa $\omega = V_{BA}/\text{BA}$ dan bahwa $R\omega = (\text{BA})\ (V_{BA}/\text{BA})^2 = V_{BA}{}^2/\text{BA}$, kita dapat menyatakan persamaan dalam cara yang berbeda:

$$A_B = A_A \nrightarrow \frac{V_{BA}{}^2}{\mathbf{BA}} \nrightarrow \text{BA}\alpha$$

6-3 Percepatan Sebuah Titik Yang Berputar Terhadap Satu Pusat Tetap Dengan Suatu Jari-Jari Konstan. Analisa Grafis



Gambar *6-3a* memperlihatkan suatu titik *B* yang bergerak sepanjang busur lingkaran, dengan dengan jari-jari konstan *R* kesuatu posisi baru *B'*. Kecepatan awal titik adalah $R\omega$, dan kecepatan titik sebuah suatu perubahan sudut sebesar $\Delta\theta$ dari garis radial adalah $R(\omega+\Delta\omega)$, dimana $\Delta\omega$ adalah perubahan kecepatan sudut garis radial. Perubahan kecepatan seperti terlihat dalam gambar 6-3*b* adalah perbedaan vector kecepatan awal dan akhir, yang perubahan kecepatan ini ditandai dengan ΔV.

Komponen-komponen yang dipilih di sini ada dua seperti ditunjukan dalam gambar 6-3*c*, dimana suatu komponen, [$R(\omega + \Delta\omega)\cos \Delta\theta$ - $R\omega$], mempunyai arah sepanjang vector *"Rω"*, dan komponen yang lainnya, $R(\omega + \Delta\omega)\cos \Delta\theta$ tegak lurus ke vector $R\omega$.

Jadi komponen perubahan kecepatan dalam arah normal atau radial, yakni tegak lurus ke vector *"Rω"*, ditandai dengan ΔV^t, adalah

$$\Delta V^t = R(\omega + \Delta\omega) \cos \Delta\theta - R\omega$$

Dan komponen perubahan kecepatan dalam arah normal atau radial, yakni tegak lurus ke vector $R\omega$, ditandai dengan ΔV^n, adalah

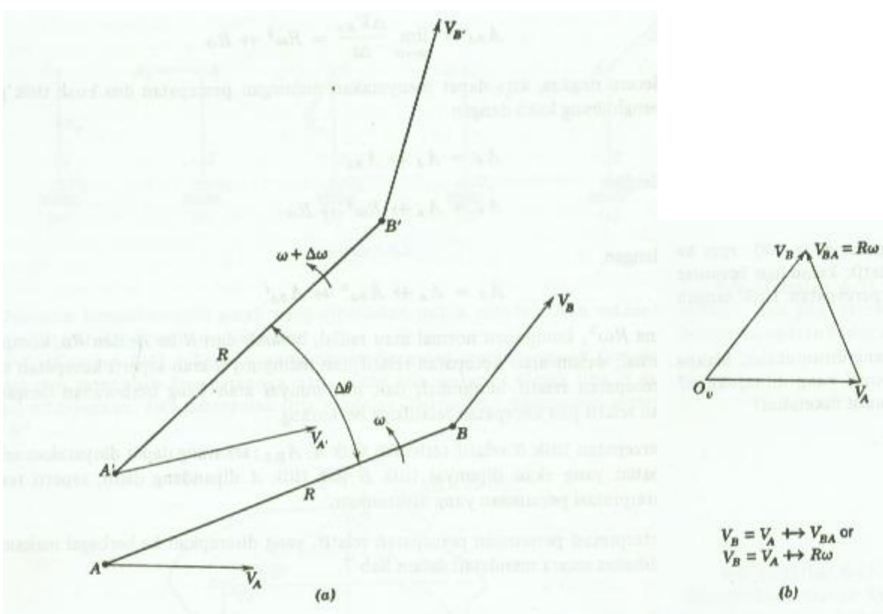
$$\Delta V^n = R(\omega + \Delta\omega)\sin \Delta\theta$$

Bagilah masing-masing persamaan dengan Δt, dan ambil limitnya pada saat Δt mendekati nol:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(\omega + \Delta\omega)\cos \Delta\theta}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R\omega}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(\omega + \Delta\omega)\sin \Delta\theta}{\Delta t}$$

6-4 Percepatan Relatif Dua Buah Titik Pada Satu Penghubung Kaku. Analisis Grafis



Gambar 6-4*a* memperlihatkan sebuah penghubung kaku, dinyatakan dengan *A-B* dalam suatu posisi seperti yang diberikan, dimana penghubung berputar ke arah melawan putaran

jam dengan kecepatan sudut ω. Sesudah satu periode waktu, Δt, garis A-B bergerak ke suatu posisinya A'-B', dengan perubahan sudut sebesar $\Delta\theta$, dan dalam posisinya yang baru garis mempunyai kecepatan sudut dengan $(\omega + \Delta\omega)$. Gambar 6-4*b* memperlihatkan polygon vector kecepatan untuk persamaan

$$V_B = V_A \nrightarrow R\omega$$

Dan gambar 6-4*c* memperlihatkan polygon vector kecepatan untuk persamaan

$$V_{B'} = V_{A'} \nrightarrow R(\omega + \Delta\omega)$$

Kurangkan persaman 1 dari persamaan 2

$$(V_{B'} \rightarrow V_B) = (V_{A'} \rightarrow V_A) \nrightarrow (R(\omega + \Delta\omega) \rightarrow R\omega)$$

Dalam persamaan diatas $V_{B'} \rightarrow V_B = \Delta V_B$ adalah perubahan kecepatan titik B: $V_{A'} \rightarrow V_A = \Delta V_A$ adalah perubahan kecepatan titik A, sedangkan $R(\omega + \Delta\omega) \rightarrow R\omega = \Delta V_{BA}$ adalah perubahan kecepatan relative.

Subsitusikan hal ini kedalam pers. 3 maka kita dapatkan,

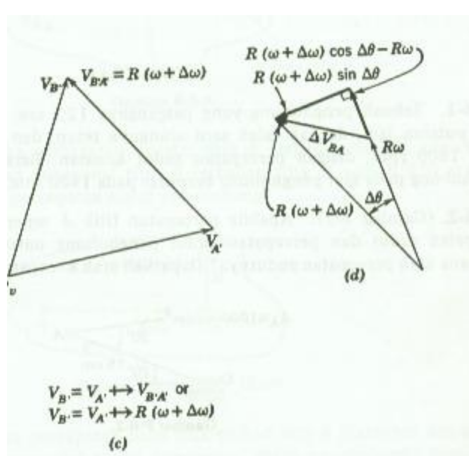
$$\Delta V_B = V_A \nrightarrow V_{BA}$$

Bagi seluruhnya dengan Δt dan ambil limitnya pada saat mendekati nol, maka kita dapatkan

$$A_B = A_A \nrightarrow A_{BA}$$

Pertanyaanya sekarang adalah berapa besarnya ABA. Harga ini dapat ditentukan dari pengujian   yang dapat dinyatakan dengan

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V_{BA}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(\omega + \Delta\omega)}{\Delta t} \rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R\omega}{\Delta t}$$



Dengan membandingkan Gambar 6-3*c* dan Gambar 6-4*d* terlihat bahwa perubahan kecepatan sebuah titik pada sebuah penghubung yang berputar terhadap satu pusat tetap adalah sama persis seperti perubahan kecepatan relative dua buah titik pada satu penghubung yang bergerak dalam suatu bidang: sehingga dengan memakai hasil-hasil pada sub-sub dimuka, kita dapat menuliskan persamaan.

Secara ringkas, kita dapat menyatakan hubungan percapatan dua buah titik pada satu penghubung kaku dengan

$$A_B = A_A \; +\!\!\!\rightarrow \; A_{BA}$$

Atau dengan

$$A_B = A_A \; R\omega^2 \; +\!\!\!\rightarrow \; R\alpha$$

Atau dengan

$$A_B = A_A \quad A_{BA}{}^{n} \; +\!\!\!\rightarrow \; A_{BA}{}^{t}$$

Dimana $R\omega^2$, komponen normal atau radial, berarah dari B ke A; dan $R\alpha$, komponen tangensial, dalam arah kecepatan realtif dan mempunyai arah seperti kecepatan jika kecepatan relative bertambah dan mempunyai arah yang berlawan dengan kecepatan relatifnya berkurang.