SISTEM BILANGAN REAL

A. Bilangan Real

Bilangan real merupakan gabungan dari bilangan rasional dengan bilangan irasional. Bilangan rasional sebagai bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan a, b bilangan bulat dan b $\neq$ 0. Dengan demikian bilangan rasional dapat berupa bilangan bulat, bilangan yang dapat dinyatakan dengan pecahan atau bentuk desimal , dan campurannya. Pecahan didefinisikan sebagai bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan a, b bilangan bulat dan b $\neq$ 0, a $\neq$ kb untuk setiap bilangan bulat k. Untuk selanjutnya jika $\frac{a}{b}$ pecahan maka a dinamakan pembilang dan b dinamakan penyebut. Berdasarkan definisi tersebut maka ada dua macam pecahan yaitu : pecahan murni bila $|a| < |b|$ dan pecahan tidak murni (campuran) bila $|a| > |b|$. Dalam bentuk desimal, bilangan rasional berupa pecahan desimal berulang. Sedangkan bilangan irasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$, dengan a, b bilangan bulat dan b $\neq$ 0, misalnya : $\sqrt{2}$, log 3, π , bilangan e dan sebagainya. Bentuk-bentuk akar merupakan bilangan irasional, bilangan-bilangan ini adalah akar-akar bilangan rasional yang bukan bilangan rasional .

Himpunan bilangan real (nyata) sering dinyatakan dengan R. Dengan sistem bilangan real, maka antara bilangan-bilangan real dengan titik-titik pada garis bilangan ada hubungan satu-satu sehingga pada garis bilangan tidak terdapat tempat yang kosong. Pada sistem bilangan real , kalau kita lakukan operasi penjumlahan dan perkalian , maka hasilnya selalu bilangan real juga. Hal seperti ini dikatakan bahwa operasi penjumlahan dan perkalian pada bilangan real bersifat “tertutup”. Ada beberapa aksioma yang memberikan sifat-sifat tentang operasi penjumlahan dan perkalian di R, yaitu :

1. Sifat ketertutupan dan ketunggalan

   Jika a, b $\in$ R , maka terdapat satu dan hanya satu bilangan real yang dinyatakan dengan a + b dan ab.

2. Sifat komutatif (pertukaran)

   Jika a, b $\in$ R , maka a + b = b + a dan ab = ba

3. Sifat assosiatif (pengelompokan)

   Jika a, b dan c $\in$ R , maka a + (b + c) = (a + b) + c dan a (bc) = (ab) c

4. Sifat distributif (penyebaran)

   Jika a, b dan c $\in$ R , maka a (b + c) = ab + ac , yaitu sifat penyebaran dari perkalian terhadap penjumlahan.

5. Adanya unsur identitas (satuan)

   Ada dua bilangan real 0 dan 1 sedemikian sehingga a + 0 = a dan a.1 = a

6. Adanya negatif atau invers terhadap penjumlahan

   Untuk setiap bilangan real a, ada suatu bilangan real yang dinamakan negatif dari a, dinyatakan dengan –a (dibaca " negatif dari a") sehingga a + (-a) = 0

7. Adanya kebalikan atau invers terhadap perkalian

   Untuk setiap bilangan real a, kecuali 0 ada suatu bilangan real yang dinamakan kebalikan dari a dinyatakan dengan a^{-1} atau $\frac{1}{a}$ sehingga a. $\frac{1}{a}$ = 1

Dari pengertian bilangan yang telah dipelajari perlihatkan macam-macam bilangan dan hubungannya satu sama lain dengan diagram. (diskusikan.)

B. Operasi Hitung Pada Bilangan Real

1. Operasi Hitung pada Bilangan Bulat

Dalam Matematika operasi diartikan sebagai " pengerjaan" .Operasi yang dimaksud adalah operasi hitung. Pada dasarnya operasi hitung mencakup empat pengerjaan dasar, yaitu : penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian. Dari ke empat operasi ini yang merupakan operasi pokok ialah penjumlahan. Pengurangan merupakan lawan penjumlahan (penambahan) . Perkalian merupakan penambahan berulang. Sedangkan pembagian merupakan pengurangan berulang..Operasi hitung tersebut merupakan operasi biner yaitu operasi untuk sepasang bilangan (unsur), sehingga apabila ada tiga unsur atau lebih tidak dapat melakukan pengerjaan itu sekaligus tetapi hanya dapat diambil dua unsure sekaligus. Sedangkan urutan pengerjaannya apabila tidak memakai tanda kurung maka urutan yang berlaku secara internasional yaitu pertama perpangkatan, kedua perkalian dan pembagian (sama kuat, yang ditulis disebelah kiri didahulukan) dan ketiga penjumlahan dan pengurangan (sama kuat). Agar dalam perhitungan tidak menimbulkan salah tafsir maka sebaiknya digunakan tanda kurung.

2. Operasi Hitung pada Bilangan Pecahan

a. Penjumlahan dan Pengurangan Pecahan

Untuk menentukan hasil penjumlahan atau pengurangan pecahan, nyatakan pecahan-pecahan itu dengan pecahan –pecahan yang penyebutnya sama, dengan cara mencari dahulu KPK-nya kemudian jumlahkan atau kurangkan pembilangnya.

Untuk menjumlahkan atau mengurangkan pecahan desimal, dilakukan dengan cara yang hampir sama dengan menjumlahkan atau mengurangkan bilangan bulat dengan memperhatikan letak koma (nilai tempatnya)

b. Perkalian dan Pembagian Pecahan

Untuk mengalikan dua pecahan atau lebih, kalikan pembilang dengan pembilang dan penyebut dengan penyebut dari pecahan-pecahan itu.

Untuk membagi dengan $\frac{a}{b}$ sama artinya dengan mengalikan dengan $\frac{b}{a}$. Dengan kata lain, untuk membagi dua pecahan dapat dilakukan dengan mengalikan pecahan yang satu dengan kebalikan pecahan yang lain

3. Persen

Suatu pecahan dapat ditulis dalam tiga cara , yaitu : pecahan biasa, pecahan desimal dan persen. Persen berarti “ perseratus “ ditulis “ % “ yaitu pecahan yang berpenyebut 100. Untuk mengubah bentuk pecahan biasa kebentuk persen dapat dilakukan dengan cara yaitu: mengubah pecahan biasa itu menjadi pecahan yang senilai dengannya dan berpenyebut 100 atau cara kedua dengan mengalikan pecahan itu dengan 100 % Dengan demikian setiap bilangan pecahan biasa dapat di ubah ke bentuk yang lain atau sebaliknya, misalnya : $\frac{2}{5}$ = 0,4 = 40 %

C. Perbandingan

Dalam membandingkan ukuran dua obyek terdapat dua cara, yaitu membandingkan dengan cara mencari selisihnya sehingga dapat dikatakan mana yang lebih dari yang lain dan yang kedua mengamati/mencari nilai perbandingan antara ukuran dari kedua obyek itu.

Sebagai contoh, tinggi badan Ani adalah 150 cm sedangkan Watik 160 cm. Jika cara membandingkan yang dimaksud adalah siapa yang lebih tinggi maka jawabannya adalah Watik dengan selisih tinggi badan = 160 cm – 150 cm = 10 cm. Namun jika yang ditanyakan adalah nilai perbandingan tinggi badan Ani dengan Watik maka dapat dinyatakan dengan perbandingan : 150 cm : 160 cm = 15 : 16 = $\frac{15}{16}$.

Perbandingan a : b, dibaca "a berbanding b". Ada dua macam perbandingan yang sering kita bicarakan antara lain :

1). Perbandingan senilai:

Apabila terdapat korespodensi satu-satu antara dua obyek dengan sifat bahwa nilai perbandingan dua elemen di obyek pertama *sama dengan* nilai perbandingan dua elemen yang bersesuaian di obyek kedua maka kedua obyek itu disebut berbanding senilai.

Perbandingan senilai digunakan juga dalam membuat skala pada peta atau membuat model. Grafik dari perbandingan senilai berupa garis lurus

Misalnya : Suatu kendaraan dengan kecepatan 60 km/jam, berarti :

Lama berjalan	1	2	3	…………….	n
jarak	60	120	180	…………….	n. 60

Tampak bahwa nilai perbandingan lama perjalanan = nilai perbandingan jarak yang bersesuaian, sehingga $\frac{1}{3} = \frac{60}{180}$ .Jika waktu bertambah , maka jarak yang dicapai juga bertambah. Dapat dikatakan bahwa perbandingan antara jarak dan waktu tetap yaitu 1 : 60. Dua variabel dengan perbandingan demikian ini disebut perbandingan senilai.

Yang dimaksud skala ialah perbandingan antara jarak / panjang pada gambar dengan jarak / panjang yang sebenarnya. Dalam perbandingan tersebut jarak pada gambar biasanya dinyatakan dengan 1.

Contoh : Skala pada peta adalah 1 : 150000. Jika jarak dua kota pada peta adalah 7,5 cm. Berapakah jarak yang sebenarnya ?

Jawab : Jarak yang sebenarnya = 150000 x 7,5 cm = 11,25 km

2). Perbandingan berbalik nilai

Apabila terdapat korespodensi satu-satu antara dua obyek dengan sifat bahwa nilai perbandingan dua elemen di obyek pertama *berbalik nilainya dengan* nilai perbandingan dua elemen yang bersesuaian di obyek kedua maka perbandingan antara obyek pertama dengan obyek kedua disebut perbandingan berbalik nilai.

Misalnya : Suatu pekerjaan , jika dikerjakan oleh 1 orang akan selesai 60 hari, jika 2 orang akan selesa 30 hari, berarti :

Banyak orang	1	2	3	…………….	60
waktu	60	30	20	…………….	1

Jika banyak orang bertambah, maka banyak hari berkurang. Perbandingan banyak orang dan banyak hari tidak tetap (tetapi hasil kali dua variabel tersebut tetap yaitu 60. Dua variabel dengan perbandingan demikian ini disebut perbandingan berbalik nilai.

Secara matematika, variabel yang saling bergantungan tersebut adalah x dan y, sehingga x berubah dari x_1 menjadi x_2 dan y berubah dari y_1 menjadi y_2 maka :

a. disebut perbandingan senilai, jika : $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$

b. disebut perbandingan berbalik nilai jika : $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$

Contoh :

1. Dengan kecepatan tetap, sebuah mobil memerlukan bensin 5 liter untuk jarak 60 km. Berapa liter bensin yang diperlukan untuk menempuh jarak 150 km ?

   Jawab :

   Karena perbandingannya senilai maka :

   $\frac{60}{150} = \frac{5}{x}$ atau 60 x = 5 (150)

   $$x = \frac{750}{60} = 12{,}5$$

   Jadi untuk menempuh jarak 150 km diperlukan bensin 12,5 liter

2. Jarak antara dua kota dapat ditempuh kendaraan dengan kecepatan rata-rata 72 km/jam selama 5 jam. Berapa kecepatan rata-rata kendaraan menempuh jarak tersebut jika lama perjalanan 8 jam ?

   Jawab : Perbandingannya berbalik nilai, sehingga :

   $\frac{72}{x} = \frac{8}{5}$ atau 8 x = 72 (5)

   $$x = \frac{72(5)}{8} = 45$$

   Jadi kecepatan rata-ratanya adalah 45 km/jam

3. Suatu pekerjaan jika dikerjakan oleh tenaga profesional sebanyak 3 orang akan selesai dalam 20 hari, sedangkan jika non profesional sebanyak 5 orang akan selesai dalam 40 hari. Jika pekerjaan itu dikerjakan oleh 2 orang profesional dan 2 orang non profesional, dalam berapa hari akan selesai ?

   Jawab :

   Karena 3 orang profesional mengerjakan pekerjaan dalam 20 hari, maka dalam 1 hari seorang profesional menyelesaikan $\frac{1}{20x3}$ pekerjaan. Sedangkan seorang non profesional dalam 1 hari menyelesaikan $\frac{1}{40x5}$ pekerjaan. Dengan demikian 2 orang profesional dan 2 orang non profesional dalam 1 hari menyelesaikan $\left(\frac{2}{20x3} + \frac{2}{40x5}\right)$ pekerjaan = $\frac{13}{20x3x5}$ pekerjaan. Jadi 1 pekerjaan dapat diselesaikan dalam $\frac{20x3x5}{13}$ hari $\approx$ 24 hari

Tugas 1:

1) Seorang pengusaha berjanji akan memberikan uang sejumlah 20 juta rupiah kepada semua pemain tim bola volley jika tim itu memenangkan pertandingan pada turnamen.
   a. Nyatakan dalam jutaan rupiah dalam bentuk pecahan biasa, jika hasilnya pecahan.
      i) Jika tim yang memenangkan pertandingan tidak pernah melakukan pergantian pemain dan hadiah diberikan sama kepada setiap pemain yang bertanding.

ii) Jika hadiah dibagikan sama kepada pemain utama dan empat pemain cadangan.

b. Nyatakan dalam bentuk pecahan desimal sampai 5 tempat desimal hasil perhitungan a

2) Tabel berikut menunjukkkan hubungan antara sifat pengerjaan hitung dengan macam sistem bilangan . Berilah tanda √ artinya berlaku dan x artinya tidak.

Sifat-sifat sistem	Bilangan Asli	Bilangan Bulat	Bilangan rasional	Bilangan real
+ dan x tertutup				√
- tertutup				√
: tertutup (pembagi $\neq$ 0)				√
+ dan x komutatif				√
+ dan x assosiatif				√
Distributif X terhadap + X terhadap -				√
Unsur satuan +				√
Unsur satuan x				√
Invers +				√
Invers x		x		√

3) Untuk mendapatkan keuntungan 20 % , sebuah mobil harus dijual dengan harga Rp. 48.000.000,00 . Berapa harga pembelian mobil tersebut ?

4) Apabila satu dolar senilai dengan Rp. 9.750 dan satu yen senilai dengan 3000. Jika 12 dolar ditukar dengan yen , diperoleh berapa yen ?

5) Dengan 24 orang pekerja, suatu pasar direncanakan selesai dalam waktu 48 hari. Sesudah bekerja selama 12 hari dengan 24 pekerja, pembangunan pasar dihentikan selama 9 hari. Tentukan banyaknya pekerja yang harus ditambahkan agar pembangunan pasar dapat selesai tepat waktu

6) Cafetaria SMK “ X “ mendapat pesanan makanan kecil dengan menerima uang sebesar Rp. 600.000. Untuk membeli bahan masakan 45 %, membayar tenaga yang memasak 20 % dan pengeluaran lainnya 7 %. Berapakah sisa uangnya ?

BILANGAN BERPANGKAT

A. Pangkat (Eksponen) Bulat Positif

Bentuk perpangkatan yang paling sederhana adalah pangkat bulat positif. Misal : 2^3 artinya 2 x 2 x 2 , sehingga $2^3 = 8$ dan 2 disebut bilangan pokok, 3 disebut pangkat atau eksponen serta 2^3 disebut bilangan berpangkat.

Pangkat ke-n dari bilangan real a, dengan n bilangan bulat positif ; dinyatakan dengan a^n, didefinisikan sebagai berikut :

$$a^n = a.\ a.\ a \ldots \text{ sebanyak n faktor}$$

Dari definisi pangkat bulat positif di atas dapat diturunkan suatu teorema sebagai berikut :

1. $a^n.\ a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{m.n}$
3. $(ab)^n = a^n\, b^n$
4. $(\frac{a}{b})^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$
5. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $m > n$ dan $a \neq 0$

B. Pangkat Nol dan Bulat Negatif

Sekarang kita perluas definisi pangkat bilangan bulat lainnya, yaitu pangkat nol dan bulat negatif. Ini dilakukan sedemikian sehingga teorema yang berlaku pada pangkat bulat positif berlaku untuk semua bilangan bulat.

Ada dua akibat yang berhubungan dengan teorema dari perpangkatan di atas yaitu :

$$a^0 = 1 \quad (\text{jika } a \neq 0)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (\text{jika } a \neq 0)$$

Jika rumus 1) harus berlaku untuk pangkat nol , maka $a^0.\ a^n = a^{0+n} = a^n$. Berdasarkan unsur identitas terhadap perkalian, yaitu 1 maka memenuhi $1.\ a^n = a^n$ Dengan membandingkan kedua persamaan ini kita harus mendefinisikan $a^0 = 1$. Jadi kita definisikan :

Jika a bilangan yang tak nol maka $a^0 = 1$.

Jelas bahwa 0^0 tidak didefinisikan

Sekarang jika rumus 1) harus berlaku untuk pangkat bilangan bulat negatif maka $a^n . a^{-n} = a^0 = 1$ bila $a \neq 0$. Berdasar sifat insvers maka $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Karena itu kita definisikan :

Jika a bilangan real dan –n adalah bilangan bulat negatif maka $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$.

Dengan menggunakan definisi ini maka :

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

C. Pangkat Bulat dan Rasional

Dari uraian tersebut teorema diatas dapat berlaku untuk pangkat bulat, dan kita nyatakan dalam torema :

Jika a, b adalah bilangan real dan m, n adalah bilangan bulat maka :

1. $a^m . a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{m.n}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$
4. $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$
5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, dan $a \neq 0$

Teorema tersebut dapat diperluas untuk lebih dari dua faktor , misal $a^n.a^m.a^r = a^{n+m+r}$; $(abc)^n = a^n. b^n. c^n$ dan seterusnya.

Contoh :

Sederhanakan : $(3^{-2} + 2^{-3})^{-1}$

Jawab : $(3^{-2} + 2^{-3})^{-1} = \dfrac{1}{\frac{1}{9} + \frac{1}{8}}$

$= \dfrac{72}{17}$

Rumus –rumus dari teorema di atas dapat juga kita perluas sehingga berlaku untuk pangkat bilangan rasional, baik bilangan rasional positif , nol maupun bilangan rasional negatif, dengan pengertian bahwa :

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Contoh :

1). $9^{1/2} = 3$ karena $3^2 = 9$ 2). $\sqrt[4]{16} = 2$, karena $2^4 = 16$

Dengan pengertian tersebut kita definisikan bahwa :

Jika a dan b adalah bilangan real dan n adalah bilangan bulat positif , sehingga $b^n =$ a , maka b dinamakan akar pangkat n dari a. ditulis $b = \sqrt[n]{a}$

Semua rumus pangkat bulat positif dipenuhi oleh pangkat rasional dengan satu perkecualian, yaitu : rumus :

$(a^m)^n = a^{mn}$ tidak berlaku bila $a < 0$, m dan n bilangan genap positif .

Untuk contohnya perhatikan bentuk : $\left((-3)^2\right)^{1/2}$

Bila pertama kali kita menghitung $(-3)^2$, maka $\left((-3)^2\right)^{1/2} = 9^{1/2} = 3$

Sedangkan bila pangkatnya dikalikan telebih dulu , diperoleh :

$\left((-3)^2\right)^{1/2} = (-3)^1 = -3$. Berarti $\left((-3)^2\right)^{1/2} \neq \left((-3)^2\right)^{1/2}$. Untuk menghilangkan kesalahan ini maka kita definisikan :

Jika a bilangan real , m dan n bilangan genap positif maka : $(a^m)^{1/n} = |a|^{m/n}$

Khususnya dalam kasus m = n maka $(a^m)^{1/n} = |a|$, bilamana n adalah bilangan genap positif , atau ekuivalen dengan $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ bilamana n bilangan genap.

Dengan definisi ini, maka kesalahan di atas tidak terjadi karena

$\left((-3)^2\right)^{1/2} = \sqrt{(-3)^2} = |-3|^{2(\frac{1}{2})} = |-3| = 3$

D. Bentuk Akar

Perhatikan bahwa adanya tanda akar belum berarti merupakan bentuk akar, misalnya $\sqrt{49}$ dan $\sqrt[3]{1,728}$ bukanlan bentuk-bentuk akar karena $\sqrt{49}$ dan $\sqrt[3]{1,728}$ merupakan bilangan-bilangan rasional.. Perlu di ingat bahwa $\sqrt{a}$, telah kita artikan sebagai akar kuadrat yang non negatif dari a, dimana $a \geq 0$, misalnya $\sqrt{49} = +7$ dan bukan -7

Bentuk akar merupakan bilangan irasional, walaupun dalam perhitungan-perhitungan bentuk akar dapat didekati dengan bilangan-bilangan rasional, misalnya $\sqrt{7}$ dapat didekati dengan bilangan rasional 2,646 jika digunakan pendekatan teliti sampai 3 angka dibelakang koma

1. Penjumlahan dan Pengurangan

Untuk menyederhanakan bentuk akar dapat menggunakan sifat bahwa $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{a.b}$. Penjumlahan dan pengurangan bentuk akar dapat disederhanakan apabila akar-akarnya sejenis

Contoh : Sederhanakan $\sqrt{75} - \sqrt{147} + \sqrt{48}$

Jawab : $\sqrt{75} - \sqrt{147} + \sqrt{48} = \sqrt{25.x3} - \sqrt{49x3} + \sqrt{16x3}$

$= 5\sqrt{3} - 7\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$

$= (5 - 7 + 4)\ \sqrt{3} = 2\ \sqrt{3}$

2. Perkalian Bentuk Akar

Contoh : Sederhanakan $\sqrt{12}\ \text{x}\ \sqrt{8}$

Dengan menggunakan sifat $\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$

maka didapat $\sqrt{12}\ \text{x}\ \sqrt{8} = \sqrt{96} = \sqrt{16x6} = 4\sqrt{6}$

cara lain $\sqrt{12}\ \text{x}\ \sqrt{8} = 2\sqrt{3}\ \text{x}2\sqrt{2} = 4\sqrt{6}$

3. Merasionalkan Penyebut Pecahan

a. Pecahan-pecahan berbentuk $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$

Contoh : i) $\dfrac{6}{\sqrt{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} \text{x} \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

ii) $\sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \text{x} \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

b. Pecahan-pecahan berbentuk $\dfrac{1}{a+\sqrt{b}}$ dan $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Bentuk-bentuk akar seperti (a + $\sqrt{b}$) dan (a - $\sqrt{b}$) dinamakan bentuk-bentuk akar yang sekawan. Hasil perkaliannya adalah rasional, sebab hasil dari (a + $\sqrt{b}$) (a - $\sqrt{b}$) = $a^2 - b$ bilangan pada ruas kanan tersebut adalah rasional. Sifat bentuk akar yang sekawan ini digunakan untuk merasionalkan penyebut pecahan- pecahan yang berbentuk seperti diatas

Contoh :

i) $\dfrac{4}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{4}{\sqrt{3}-1} \text{x} \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{4(\sqrt{3}+1)}{3-1} = 2\ (\sqrt{3}+1)$

ii) $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \times \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-2\sqrt{2}+2}{1-2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{-1} = 2\sqrt{2}-3$

E. Persamaan Eksponen

Persamaan eksponen ialah persamaan yang mengandung variabel dalam eksponen.

Bentuk-bentuknya adalah :

1). $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ syarat : $a > 0$ dan $a \neq 1$

2). $a^{f(x)} = b^{f(x)} \Leftrightarrow f(x) = 0$ syarat $a, b > 0$

3). $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, syarat $a, b > 0$

4). $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$

Contoh :

1).Tentukan penyelesaian dari $5^{2x+1} = 2^{2x+1}$

jawab :

$5^{2x+1} = 2^{2x+1} \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

2). Selesaikan $2^{2x+1} + 2^{x} = 3$

Jawab :Misalkan : $2^x = y$ maka persamaan semula menjadi :

$\Rightarrow 2y^2 + y - 3 = 0$

$\Rightarrow (2y + 3)(y - 1) = 0$

$\Rightarrow y = -1\frac{1}{2}$ atau $y = 1$

Untuk $y = -1\frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = -1\frac{1}{2}$ (persamaan ini tidak ada harga x yang memenuhi sebab nilai bilangan berpangkat dengan bilangan pokok 2 selalu positip)

Untuk $y = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x = 0$

Jadi himpunan penyelesaiaannya adalah { 0 }

Tugas 2:

1) Apabila a = 16 dan b = 27, maka hitunglah berikut ini :

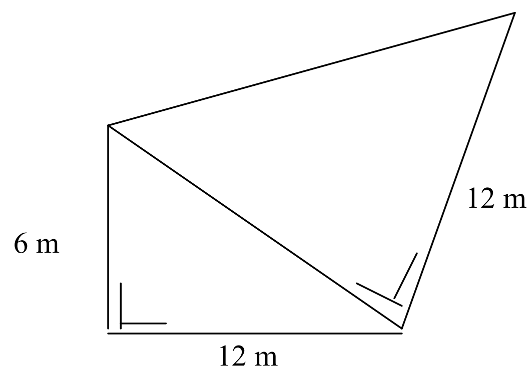
a. $2a^{-2/3}$

b. $a^{1/4} \times b^{-1/3}$

c. $3a^{-1/2} \times 4b^{-1/3}$

2). Pak Karyo mempunyai sebidang tanah yang luasnya tercatat di Kantor pertanahan adalah 1369 m^2 Ternyata pekarangan itu berbentuk persegi. Berapa panjang ukuran tanah pekarangan itu ?.

3). Berapa meter batang besi yang diperlukan untuk membuat kerangka besi di bawah ini :



4). Ukuran alas sebuah bejana berbentuk balok adalah 5 m x ($6 - 2\sqrt{3}$) m.Volum bejana itu 240 m^3 Berapa tinggi bejana ?

5). Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan $\sqrt{8^{x-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

6). Tentukan penyelesaian dari :

a) $2^{x+1} + 2^{2x+3} = 36$

b). $4^{1-x} + 2^{3-x} = 12$

c). $2^{2x+1} = 2^x + 6$

LOGARITMA

A. Pengertian dan Sifat-sifat Logaritma

Pada bilangan berpangkat , telah kita ketahui bahwa $2^3 = 8$ Penulisan seperti $2^3 = 8$ dapat ditulis dalam bentuk logaritma yaitu ${}^2\log 8 = 3$, ini karena fungsi eksponen dengan bilangan pokok $a > 0$ dan $a \neq 1$ mempunyai invers yaitu fungsi logaritma dengan bilangan pokok a. Dengan demikian dapat kita definisikan bahwa :

Fungsi logaritma dengan bilangan pokok a > 0 dan a ≠ 1 adalah invers dari fungsi eksponen dengan bilangan pokok a.

Secara umum dapat ditulis :

$${}^a\log b = c \Leftrightarrow a^c = b \text{ dengan } a > 0,\ a \neq 1 \text{ dan } b > 0$$

Pada bentuk ${}^a\log b = c$

a disebut bilangan pokok (dasar) logaritma (untuk bilangan pokok 10 biasanya tidak ditulis, misal ${}^{10}\log 3$ ditulis log 3)

b disebut bilangan yang diambil logaritmanya

c disebut hasil logaritma

Dari hubungan pangkat dan logaritma tersebut di atas maka dapat ditemukan beberapa sifat – sifat logaritma yang perlu diketahui yaitu :

Jika $a > 0$, $a \neq 1$, $m > 0$, $n > 0$ dan $x \in R$, maka :

1. ${}^a\log a^x = x$
2. $a^{{}^a\log n} = n$
3. ${}^{a^q}\log a^p = \dfrac{p}{q}$
4. ${}^a\log (mn) = {}^a\log m + {}^a\log n$
5. ${}^a\log \left(\dfrac{m}{n}\right) = {}^a\log m - {}^a\log n$
6. ${}^a\log m^x = x.\ {}^a\log m$
7. ${}^a\log m = \dfrac{{}^g\log m}{{}^g\log a}$ bila $g > 0$, $g \neq 1$

Contoh :

1). Hitunglah $^{2}\log 4 + {}^{2}\log 12 - {}^{2}\log 6$

Jawab : $^{2}\log 4 + {}^{2}\log 12 - {}^{2}\log 6 = {}^{2}\log \dfrac{4x12}{6}$

$= {}^{2}\log 8$

$= 3$

2). Jika log 2 = 0,3010 ; log 3 = 0,4771, hitunglah log 15

Jawab : $\log 15 = \log \dfrac{3x10}{2}$

= log 3 + log 10 - log 2

= 0,4771 + 1 – 0,3010

= 1,1761

B. Menggunakan Daftar Logaritma

Pada daftar logaritma disusun dengan bilangan pokok 10 yang biasanya tidak dituliskan bilangan pokoknya, misal : log 10 = 1 ; log 100 = 2 dan seterusnya. Sebelum mencari mantise (bagian desimal dari hasil pengambilan logaritma) maka perlu diketahui karakteristiknya dahulu.

Berikut ini ditunjukkan cara mencari logaritma suatu bilangan dengan menggunakan daftar :

Misalnya : log 4866 = ……

Bilangan 4866 berada diantara 1000 dan 10000 yaitu $10^3 < 4866 < 10^4$ didapat :

3 < log 4866 < 4 berarti mempunyai karakteristik 3 . Untuk mencari mantise bilangan 4866 tertulis di dalam daftar log adalah 6872 Jadi log 4866 = 3,6872.

Terlihat sebagai berikut :

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
450										
.										
.										
486							6872			

Semua nilai log dari bilangan-bilangan seperti 0,04866 ; 4,866 ; 48,66 ; 486,6 ; 48660 mempunyai mantise yang sama yaitu 6872 (mantise dengan 4 desimal), yang berbeda hanya karakteristiknya, yaitu :

log 0,04866 , karakteristiknya –2 , sehingga log 0,04866 = 0,6872 - 2

log 4,866 , karakteristiknya 0 , sehingga log 4,866 = 0,6872

log 48,66 , karakteristiknya 1 , sehingga log 4,866 = 1,6872

dan seterusnya

Sekarang bagaimana bila bilangan yang dicari mantise logaritmanya tidak ada didalam daftar ?

Misalnya log 52546 yang matisenya m.

Dari daftar nampak bahwa log 52540 mantisenya adalah 0,7205 dan

log 52550 mantisenya adalah 0,7206

Sehingga terdapat hubungan :

	Log bil	Mantise	
	52540	0,7205	
6		x	
	52546	m	
10			1(selisih dua angka terakhir kedua mantise)
	52550	0,7206	

Nilai x = m – 0,7205. Kita lakukan penambahan sebanding :

$\frac{x}{1} = \frac{6}{10} \Rightarrow$ x = 0,6. Oleh karena nilai x ditentukan pada angka terakhir sehingga

diperoleh : m = 0,7205 + 0,00006 = 0,72056

Maka log 52546 = 4,72056

Bagaimana mencari antilogaritmanya ? Operasi penarikan antilogaritma suatu bilangan merupakan operasi insvers dari operasi penarikan logaritma, dengan pengertian bahwa jika log N = a maka N disebut antilogaritma dari a

Contoh :

1). Carilah x , jika log x = 1,2041

Karena karakteristiknya 1, maka x adalah bilangan antara 10 dan 100. Kemudian carilah dalam daftar log untuk mencari tempat mantise 2041..Ternyata ada di dalam kolom 0 pada N=16. Jadi x = 16, sehingga log 16 = 1,2041

2). Carilah x, jika log x = 0,1399 – 2

Karakteristiknya adalah –2, berarti x bilangan 0,0………..

Mantise 1399 terdapat di dalam kolom 0 pada N = 138.

Jadi x = 138 dengan karakteristik –2 sama dengan 0,0138 atau

log 0,0138 = 0,1399 – 2

Contoh Soal :

1). Dengan daftar logaritma hitunglah :

$$\frac{18{,}26x(4{,}16)^2}{\sqrt{145{,}5}}$$

Jawab :

Log x = Log 18,26 + 2 Log 4,16 - $\frac{1}{2}$ Log 145,5

= 1,2615 + 2 (0,6191) - $\frac{1}{2}$ (2,1629)

= 1,2615 + 1,2382 – 1,0825

Log x = 1,4184

x = 26,2

2). Carilah x dari ${}^{x}\log 0{,}5$ = - 0,6572

Jawab :

${}^{x}\log\ 0{,}5$ = - 0,6572

$x^{-0{,}6572}$ = 0,5

- 0,6572 log x = log 0,5

$$-\log x = \frac{0{,}6990-1}{-0{,}6572} = \frac{-0{,}3010}{-0{,}6572}$$

log x = 0,4580

x = 2,872

C. Persamaan Logaritma

Untuk menyelesaikan persamaan logaritma perlu diperhatikan syarat-syarat dari bentuk ${}^{a}\log b = c$ yaitu : a sebagai bilangan pokok harus dipenuhi a > 0 dan a ≠ 1, sedangkan b sebagai bilangan yang ditarik logaritmanya harus dipenuhi b > 0. Perlu juga dibedakan antara log log x dan $\log^2 x$ karena log log x = log (logx), sedangkan $\log^2 x$ = (log x)l(ogx)

Contoh :

Tentukan penyelesaian dari : log (x-2) + log (x-1) = log 6

Jawab :

Syarat yang harus dipenuhi adalah :

i) $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

ii) $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

Dari syarat i) dan ii) dapat ditulis x > 2

Maka : log (x-2) + log (x-1) = log 6

$\Rightarrow \log (x-2)(x-1) = \log 6$

$\Rightarrow (x-2)(x-1) = 6$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Rightarrow (x-4)(x+1) = 0$

$\Rightarrow x = 4$ atau $x = -1$

Karena syarat yang harus dipenuhi x > 2 maka H.P = { 4 }

Tugas 3:

1. Selesaikan :

   a). ${}^{3}\log 9^2$ b). $\log 2 + \log 10 - \log \frac{1}{5}$ c). ${}^{2}\log 2 + {}^{2}\log 3 - {}^{2}\log 6 - {}^{2}\log 8$

2. Jika log 5 = 0,69897 dan log 7 = 0,84570. Hitunglah log 1,25
3. Berapa nilai x jika ${}^{x}\log 8 + {}^{x}\log 4 - {}^{x}\log 2 = 2$
4. Selesaikan :

   a). $(1{,}4)^{2{,}3}$ b). $\dfrac{(8{,}476)^2 x 25{,}43}{\sqrt[3]{124{,}6}}$

5. Buktikan bahwa $a^2 + b^2 = 7ab$ jika diketahui bahwa $\log \dfrac{a+b}{3} = \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$
6. Tentukan penyelesaian dari :

   a). $\log x + \log (x+2) - 2 = \log 0{,}15$

   b). $2 \log^2 x + \log x^3 - 9 = 0$