Himpunan (*set*)

- Himpunan (*set*) adalah kumpulan objek-objek yang *berbeda*.
- Objek di dalam himpunan disebut **elemen**, **unsur**, atau **anggota**.

Cara Penyajian Himpunan

1. *Enumerasi*

Contoh 1.

- Himpunan empat bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- Himpunan lima bilangan genap positif pertama: $B = \{4, 6, 8, 10\}$.
- C = {kucing, a, Amir, 10, paku}
- $R = \{ a, b, \{a, b, \mathrm{c}\}, \{a, c\} \}$
- $C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$
- $K = \{ \{\} \}$
- Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: $\{1, 2, ..., 100 \}$
- Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Keanggotaan

$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A;
$x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A.

Contoh 2.

Misalkan: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{ a, b, \{a, b, \mathrm{c}\}, \{a, c\} \}$
$K = \{\{\}\}$

maka

$3 \in A$
$5 \notin B$
$\{a, b, c\} \in R$
$c \notin R$
$\{\} \in K$
$\{\} \notin R$

Contoh 3. Bila $P_1 = \{a, b\}$, $P_2 = \{ \{a, b\} \}$, $P_3 = \{\{\{a, b\}\}\}$, maka

$a \in P_1$
$a \notin P_2$
$P_1 \in P_2$
$P_1 \notin P_3$
$P_2 \in P_3$

2. *Simbol-simbol Baku*

P = himpunan bilangan bulat positif = { 1, 2, 3, ... }
N = himpunan bilangan alami (natural) = { 1, 2, ... }
Z = himpunan bilangan bulat = { ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... }
Q = himpunan bilangan rasional
R = himpunan bilangan riil
C = himpunan bilangan kompleks

- Himpunan yang universal: **semesta**, disimbolkan dengan U.
  Contoh: Misalkan U = {1, 2, 3, 4, 5} dan A adalah himpunan bagian dari U, dengan $A = \{1, 3, 5\}$.

3. *Notasi Pembentuk Himpunan*

Notasi: { x | syarat yang harus dipenuhi oleh x }

Contoh 4.

(i) A adalah himpunan bilangan bulat positif yang kecil dari 5

A = { x | x adalah bilangan bulat positif lebih kecil dari 5}

atau

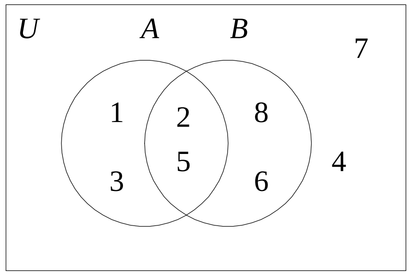
$A = \{ x \mid x \in P, x < 5 \}$

yang ekivalen dengan $A = \{1, 2, 3, 4\}$

(ii) M = { x | x adalah mahasiswa yang mengambil kuliah IF2151}

4. *Diagram Venn*

Contoh 5.
Misalkan U = {1, 2, …, 7, 8}, A = {1, 2, 3, 5} dan B = {2, 5, 6, 8}.
Diagram Venn:



Kardinalitas

- Jumlah elemen di dalam A disebut kardinal dari himpunan A.
- Notasi: $n(A)$ atau $|A|$

Contoh 6.
(i) $B = \{ x \mid x$ merupakan bilangan prima yang lebih kecil dari 20 },
atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ maka $|B| = 8$
(ii) T = {kucing, a, Amir, 10, paku}, maka $|T| = 5$
(iii) $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$, maka $|A| = 3$

Himpunan Kosong

- Himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong (*null set*).
- Notasi : $\varnothing$ atau {}

Contoh 7.
(i) $E = \{ x \mid x < x \}$, maka $n(E) = 0$
(ii) P = { orang Indonesia yang pernah ke bulan }, maka $n(P) = 0$
(iii) $A = \{x \mid x$ adalah akar persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0 \}$, $n(A) = 0$

- himpunan {{ }} dapat juga ditulis sebagai {∅}
- himpunan {{ }, {{ }}} dapat juga ditulis sebagai {∅, {∅}}
- {∅} bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

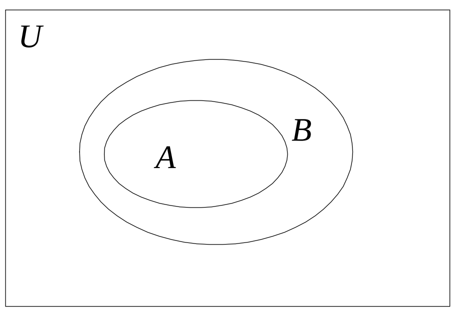
Himpunan Bagian (*Subset*)

- Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B.

- Dalam hal ini, B dikatakan *superset* dari A.

- Notasi: $A \subseteq B$

- Diagram Venn:



Contoh 8.
(i) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
(ii) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
(iii) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$
(iv) Jika $A = \{ (x, y) \mid x + y < 4, x \geq, y \geq 0 \}$ dan
$B = \{ (x, y) \mid 2x + y < 4, x \geq 0$ dan $y \geq 0 \}$, maka $B \subseteq A$.

TEOREMA 1. Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:
(a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).
(b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A ($\emptyset \subseteq A$).
(c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

- $\emptyset \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka $\emptyset$ dan A disebut himpunan bagian tak sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan A.
  Contoh: A = {1, 2, 3}, maka {1, 2, 3} dan $\emptyset$ adalah *improper subset* dari A.

- $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$
  (i) $A \subset B$: A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.
  A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B.

  Contoh: {1} dan {2, 3} adalah *proper subset* dari {1, 2, 3}

  (ii) $A \subseteq B$: digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B yang memungkinkan $A = B$.

Himpunan yang Sama

- $A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A.

- $A = B$ jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.

- Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Contoh 9.
(i) Jika A = { 0, 1 } dan $B = \{ x \mid x (x - 1) = 0 \}$, maka $A = B$
(ii) Jika A = { 3, 5, 8, 5 } dan B = {5, 3, 8 }, maka $A = B$
(iii) Jika A = { 3, 5, 8, 5 } dan B = {3, 8}, maka $A \neq B$

Untuk tiga buah himpunan, A, B, dan C berlaku aksioma berikut:

(a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$
(b) jika $A = B$, maka $B = A$
(c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

Himpunan yang Ekivalen

- Himpunan A dikatakan ekivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.

- Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

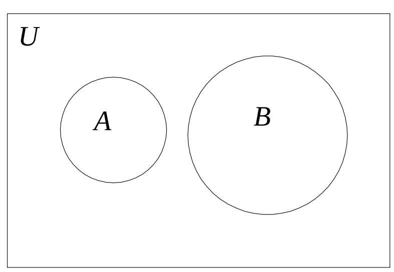
Contoh 10.
Misalkan $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

Himpunan Saling Lepas

- Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.

- Notasi : $A \,//\, B$

- Diagram Venn:



Contoh 11.
Jika $A = \{ x \mid x \in P, x < 8 \}$ dan $B = \{ 10, 20, 30, ... \}$, maka $A \,//\, B$.

Himpunan Kuasa

- Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.

- Notasi : $P(A)$ atau 2^A

- Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$.

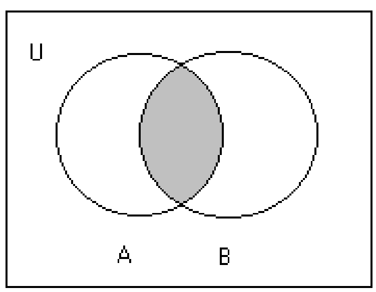
Contoh 12.
Jika $A = \{ 1, 2 \}$, maka $P(A) = \{ \emptyset, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \}\}$

Contoh 13.
Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, dan himpunan kuasa dari himpunan $\{\emptyset\}$ adalah $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Operasi Terhadap Himpunan

a. Irisan (*intersection*)

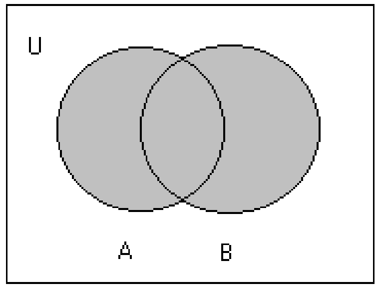
- Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$



Contoh 14.
(i) Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$,
maka $A \cap B = \{4, 10\}$
(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 9 \}$ dan $B = \{ -2, 6 \}$, maka $A \cap B = \emptyset$.
Artinya: $A \mathbin{//} B$

b. Gabungan (*union*)

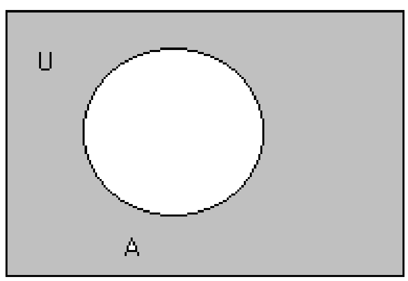
- Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$



Contoh 15.
(i) Jika $A = \{ 2, 5, 8 \}$ dan $B = \{ 7, 5, 22 \}$, maka $A \cup B = \{ 2, 5, 7, 8, 22 \}$
(ii) $A \cup \varnothing = A$

c. Komplemen (*complement*)

- Notasi : $\overline{A} = \{ x \mid x \in U, x \notin A \}$



Contoh 16.
Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },
(i) jika $A = \{1, 3, 7, 9\}$, maka $\overline{A} = \{2, 4, 6, 8\}$
(ii) jika $A = \{ x \mid x/2 \in P, x < 9 \}$, maka $\overline{A} = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

Contoh 17. Misalkan:

A = himpunan semua mobil buatan dalam negeri
B = himpunan semua mobil impor
C = himpunan semua mobil yang dibuat sebelum tahun 1990
D = himpunan semua mobil yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta
E = himpunan semua mobil milik mahasiswa universitas tertentu

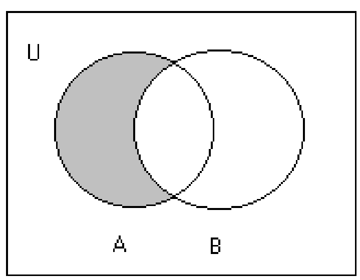
(i) "mobil mahasiswa di universitas ini produksi dalam negeri atau diimpor dari luar negeri" → $(E \cap A) \cup (E \cap B)$ atau $E \cap (A \cup B)$

(ii) "semua mobil produksi dalam negeri yang dibuat sebelum tahun 1990 yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta" → $A \cap C \cap D$

(iii) "semua mobil impor buatan setelah tahun 1990 mempunyai nilai jual lebih dari Rp 100 juta" → $\overline{C} \cap \overline{D} \cap B$

d. Selisih (*difference*)

- Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$



Contoh 18.
(i) Jika $A = \{ 1, 2, 3, ..., 10 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$, maka $A - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ dan $B - A = \varnothing$
(ii) $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

e. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

- Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

Contoh 19.
Jika $A = \{ 2, 4, 6 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5 \}$, maka $A \oplus B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$

Contoh 20. Misalkan

U = himpunan mahasiswa
P = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UTS di atas 80
Q = himpunan mahasiswa yang nilain ujian UAS di atas 80

Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya di atas 80, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 80, dan mendapat nilai C jika kedua ujian di bawah 80.

(i) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai A" : $P \cap Q$
(ii) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai B" : $P \oplus Q$
(iii) "Ssemua mahasiswa yang mendapat nilai C" : U – $(P \cup Q)$

TEOREMA 2. Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)
(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

f. Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

- Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A$ dan $b \in B\}$

Contoh 20.

(i) Misalkan $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$, maka

$$C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, \mathrm{a}), (2, b), (3, a), (3, b) \}$$

(ii) Misalkan $A = B$ = himpunan semua bilangan riil, maka

$A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

Catatan:

1. Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka: $|A \times B| = |A| \,.\, |B|$.
2. Pasangan berurutan (a, b) berbeda dengan (b, a), dengan kata lain $(a, b) \neq (b, a)$.
3. Perkalian kartesian tidak komutatif, yaitu $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong.
   Pada Contoh 20(i) di atas, $D \times C = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3) \} \neq C \times D$.
4. Jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$, maka $A \times B = B \times A = \varnothing$

Contoh 21. Misalkan

A = himpunan makanan = { s = soto, g = gado-gado, n = nasi goreng, m = mie rebus }

B = himpunan minuman = { c = coca-cola, t = teh, d = es dawet }

Berapa banyak kombinasi makanan dan minuman yang dapat disusun dari kedua himpunan di atas?

Jawab:

$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 4 \cdot 3 = 12$ kombinasi dan minuman, yaitu $\{(s, c), (s, t), (s, d), (g, c), (g, t), (g, d), (n, c), (n, t), (n, d), (m, c), (m, t), (m, d)\}$.

Contoh 21. Daftarkan semua anggota himpunan berikut:

(a) $P(\varnothing)$ (b) $\varnothing \times P(\varnothing)$ (c) $\{\varnothing\} \times P(\varnothing)$ (d) $P(P(\{3\}))$

<u>Penyelesaian</u>:

(a) $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$

(b) $\varnothing \times P(\varnothing) = \varnothing$ (ket: jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$ maka $A \times B = \varnothing$)

(c) $\{\varnothing\} \times P(\varnothing) = \{\varnothing\} \times \{\varnothing\} = \{(\varnothing,\varnothing)\}$

(d) $P(P(\{3\})) = P(\{ \varnothing, \{3\} \}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{3\}\}, \{\varnothing, \{3\}\} \}$

Perampatan Operasi Himpunan

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$$

Contoh 22.

(i) $A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$

$$A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

(ii) Misalkan $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$, dan $C = \{\alpha, \beta\}$, maka

$A \times B \times C = \{(1, a, \alpha), (1, a, \beta), (1, b, \alpha), (1, b, \beta), (2, a, \alpha), (2, a, \beta), (2, b, \alpha), (2, b, \beta) \}$

Hukum-hukum Himpunan

1. Hukum identitas: – $A \cup \varnothing = A$ – $A \cap \mathrm{U} = A$	2. Hukum *null*/dominasi: – $A \cap \varnothing = \varnothing$ – $A \cup \mathrm{U} = \mathrm{U}$
3. Hukum komplemen: – $A \cup \overline{A} = \mathrm{U}$ – $A \cap \overline{A} = \varnothing$	4. Hukum idempoten: – $A \cup A = A$ – $A \cap A = A$
5. Hukum involusi: – $\overline{(\overline{A})} = A$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): – $A \cup (A \cap B) = A$ – $A \cap (A \cup B) = A$
7. Hukum komutatif: – $A \cup B = B \cup A$ – $A \cap B = B \cap A$	8. Hukum asosiatif: – $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ – $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
9. Hukum distributif: – $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	10. Hukum De Morgan: – $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ – $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
11. Hukum 0/1 – $\overline{\varnothing} = \mathrm{U}$ – $\overline{\mathrm{U}} = \varnothing$	

Prinsip Dualitas

- Prinsip dualitas: dua konsep yang berbeda dapat dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar.

  Contoh: AS → kemudi mobil di kiri depan
  Inggris (juga Indonesia) → kemudi mobil di kanan depan

  Peraturan:

  (a) di Amerika Serikat,
  - mobil harus berjalan di bagian *kanan* jalan,
  - pada jalan yang berlajur banyak, lajur *kiri* untuk mendahului,
  - bila lampu merah menyala, mobil belok *kanan* boleh langsung

  (b) di Inggris,
  - mobil harus berjalan di bagian *kiri* jalan,
  - pada jalur yang berlajur banyak, lajur *kanan* untuk mendahului,
  - bila lampu merah menyala, mobil belok *kiri* boleh langsung

  Prinsip **dualitas**:
  Konsep kiri dan kanan dapat dipertukarkan pada kedua negara tersebut sehingga peraturan yang berlaku di Amerika Serikat menjadi berlaku pula di Inggris.

- **(Prinsip Dualitas pada Himpunan).** Misalkan S adalah suatu kesamaan (*identity*) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi seperti $\cup$, $\cap$, dan komplemen. Jika S^* diperoleh dari S dengan mengganti $\cup \to \cap$, $\cap \to \cup$, $\varnothing \to U$, $U \to \varnothing$, sedangkan komplemen dibiarkan seperti semula, maka kesamaan S^* juga benar dan disebut dual dari kesamaan S.

1. Hukum identitas: $A \cup \emptyset = A$	Dualnya: $A \cap U = A$
2. Hukum *null*/dominasi: $A \cap \emptyset = \emptyset$	Dualnya: $A \cup U = U$
3. Hukum komplemen: $A \cup \overline{A} = U$	Dualnya: $A \cap \overline{A} = \emptyset$
4. Hukum idempoten: $A \cup A = A$	Dualnya: $A \cap A = A$
5. Hukum penyerapan: $A \cup (A \cap B) = A$	Dualnya: $A \cap (A \cup B) = A$
6. Hukum komutatif: $A \cup B = B \cup A$	Dualnya: $A \cap B = B \cap A$
7. Hukum asosiatif: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Dualnya: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
8. Hukum distributif: $A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$	Dualnya: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9. Hukum De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Dualnya: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
10. Hukum 0/1 $\overline{\emptyset} = U$	Dualnya: $\overline{U} = \emptyset$

Contoh 23. Dual dari $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$ adalah

$$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A.$$

Prinsip Inklusi-Eksklusi

Untuk dua himpunan A dan *B*:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

Contoh 24. Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

<u>Penyelesaian</u>:

A = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3,
B = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5,
$A \cap B$ = himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5 (yaitu himpunan bilangan bulat yang habis dibagi oleh KPK – Kelipatan Persekutuan Terkecil – dari 3 dan 5, yaitu 15),

yang ditanyakan adalah $|A \cup B|$.

$$|A| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33,$$
$$|B| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20,$$
$$|A \cap B| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 33 + 20 - 6 = 47$$

Jadi, ada 47 buah bilangan yang habis dibagi 3 atau 5.

Untuk tiga buah himpunan *A*, *B*, dan *C*, berlaku

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Untuk himpunan $A_1, A_2, \ldots, A_r$, berlaku:

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r\right| = \sum_i \left|A_i\right| - \sum_{1 \le i \le j \le r} \left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{1 \le i \le j \le k \le r} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| + \ldots + (-1)^{r-1} \left|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r\right|$$

Partisi

- Partisi dari sebuah himpunan A adalah sekumpulan himpunan bagian tidak kosong $A_1, A_2, \ldots$ dari A sedemikian sehingga:
  (a) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = A$, dan
  (b) $A_i \cap A_j = \varnothing$ untuk $i \neq j$

Contoh 25. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, maka $\{ \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{7, 8\}, \{5, 6\} \}$ adalah partisi A.

Himpunan Ganda

- Himpunan yang elemennya boleh berulang (tidak harus berbeda) disebut **himpunan ganda** (*multiset*).

  Contohnya, $\{1, 1, 1, 2, 2, 3\}$, $\{2, 2, 2\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{\}$.

- **Multiplisitas** dari suatu elemen pada himpunan ganda adalah jumlah kemunculan elemen tersebut pada himpunan ganda. Contoh: $M = \{ 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1 \}$, multiplisitas 0 adalah 4.

- Himpunan (*set*) merupakan contoh khusus dari suatu *multiset*, yang dalam hal ini multiplisitas dari setiap elemennya adalah 0 atau 1.

- Kardinalitas dari suatu *multiset* didefinisikan sebagai kardinalitas himpunan padanannya (ekivalen), dengan mengasumsikan elemen-elemen di dalam *multiset* semua berbeda.

Operasi Antara Dua Buah *Multiset*:

Misalkan P dan Q adalah *multiset*:

1. $P \cup Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas maksimum elemen tersebut pada himpunan P dan Q.
   Contoh: $P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q =\{ a, a, b, c, c \}$,
   $P \cup Q = \{ a, a, a, b, c, c, d, d \}$

2. $P \cap Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas minimum elemen tersebut pada himpunan P dan Q.
   Contoh: $P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q = \{ a, a, b, c, c \}$
   $P \cap Q = \{ a, a, c \}$

3. P – Q adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan:
   - multiplisitas elemen tersebut pada P dikurangi multiplisitasnya pada Q, jika selisihnya positif
   - 0, jika selisihnya nol atau negatif.

   Contoh: $P = \{ a, a, a, b, b, c, d, d, e \}$ dan $Q = \{ a, a, b, b, b, c, c, d, d, f \}$ maka $P - Q = \{ a, e \}$

4. $P + Q$, yang didefinisikan sebagai jumlah (*sum*) dua buah himpunan ganda, adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan penjumlahan dari multiplisitas elemen tersebut pada P dan Q.
   Contoh: $P = \{ a, a, b, c, c \}$ dan $Q = \{ a, b, b, d \}$,
   $P + Q = \{ a, a, a, b, b, b, c, c, d \}$

Pembuktian Pernyataan Perihal Himpunan

- Pernyataan himpunan adalah argumen yang menggunakan notasi himpunan.
- Pernyataan dapat berupa:
  1. Kesamaan (*identity*)

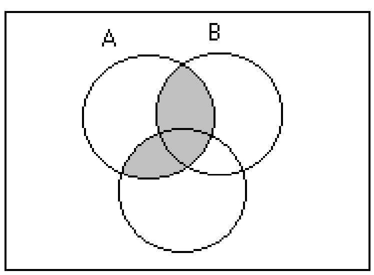
     Contoh: Buktikan "$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$"
  2. Implikasi

     Contoh: Buktikan bahwa "Jika $A \cap B = \varnothing$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka selalu berlaku bahwa $A \subseteq C$".

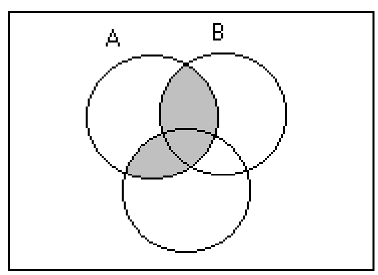
1. Pembuktian dengan menggunakan diagram Venn

Contoh 26. Misalkan *A*, *B*, dan *C* adalah himpunan. Buktikan $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dengan diagram Venn.

Bukti:



$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Kedua digaram Venn memberikan area arsiran yang sama.
Terbukti bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- Diagram Venn hanya dapat digunakan jika himpunan yang digambarkan tidak banyak jumlahnya.

- Metode ini *mengilustrasikan* ketimbang membuktikan fakta. Diagram Venn tidak dianggap sebagai metode yang valid untuk pembuktian secara formal.

2. Pembuktikan dengan menggunakan tabel keanggotaan

Contoh 27. Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bukti:

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Karena kolom $A \cap (B \cup C)$ dan kolom $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ sama, maka $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

3. Pembuktian dengan menggunakan aljabar himpunan.

Contoh 28. Misalkan A dan B himpunan. Buktikan bahwa $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

Bukti:

$$
\begin{aligned}
(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) &= A \cap (B \cup \overline{B}) && \text{(Hukum distributif)} \\
&= A \cap \mathrm{U} && \text{(Hukum komplemen)} \\
&= A && \text{(Hukum identitas)}
\end{aligned}
$$

Contoh 29. Misalkan A dan B himpunan. Buktikan bahwa $A \cup (B - A) = A \cup B$

Bukti:

$$A \cup (B - A) = A \cup (B \cap \overline{A}) \qquad \text{(Definisi operasi selisih)}$$

$= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A})$ (Hukum distributif)
$= (A \cup B) \cap U$ (Hukum komplemen)
$= A \cup B$ (Hukum identitas)

Contoh 30. Buktikan bahwa untuk sembarang himpunan A dan B, bahwa

(i) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$ dan
(ii) $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$

Bukti:

(i) $A \cup (\overline{A} \cap B) = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cap B)$ (H. distributif)
$= U \cap (A \cap B)$ (H. komplemen)
$= A \cup B$ (H. identitas)

(ii) adalah dual dari (i)
$A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$ (H. distributif)
$= \varnothing \cup (A \cap B)$ (H. komplemen)
$= A \cap B$ (H. identitas)

4. Pembuktian dengan menggunakan definisi

- Metode ini digunakan untuk membuktikan pernyataan himpunan yang tidak berbentuk kesamaan, tetapi pernyataan yang berbentuk implikasi. Biasanya di dalam implikasi tersebut terdapat notasi himpunan bagian ($\subseteq$ atau $\subset$).

Contoh 31. Misalkan A dan B himpunan. Jika $A \cap B = \varnothing$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka $A \subseteq C$. Buktikan!

Bukti:

(i) Dari definisi himpunan bagian, $P \subseteq Q$ jika dan hanya jika setiap $x \in P$ juga $\in Q$. Misalkan $x \in A$. Karena $A \subseteq (B \cup C)$, maka dari definisi himpunan bagian, x juga $\in (B \cup \mathrm{C})$.
Dari definisi operasi gabungan ($\cup$), $x \in (B \cup C)$ berarti $x \in B$ atau $x \in C$.

(ii) Karena $x \in A$ dan $A \cap B = \varnothing$, maka $x \notin B$

Dari (i) dan (ii), $x \in C$ harus benar. Karena $\forall x \in A$ juga berlaku $x \in C$, maka dapat disimpulkan $A \subseteq C$.

Tipe *Set* dalam Bahasa Pascal

- Bahasa Pascal menyediakan tipe data khusus untuk himpunan, yang bernama *set*. Tipe *set* menyatakan himpunan kuasa dari tipe ordinal (*integer*, *character*).

  Contoh:

```
type
   HurufBesar = 'A'..'Z';  { enumerasi }
   Huruf = set of HurufBesar;
var
   HurufKu : Huruf;
```

  Nilai untuk peubah `HurufKu` dapat diisi dengan pernyataan berikut:

```
HurufKu:=['A', 'C', 'D'];
HurufKu:=['M'];
HurufKu:=[];         { himpunan kosong }
```

- Operasi yang dapat dilakukan pada tipe himpunan adalah operasi gabungan, irisan, dan selisih seperti pada contoh berikut:

```
{gabungan}
HurufKu:=['A', 'C', 'D'] + ['C', 'D', 'E'];

{irisan}
HurufKu:=['A', 'C', 'D'] * ['C', 'D', 'E'];

{selisih}
HurufKu:=['A', 'C', 'D'] - ['C', 'D', 'E'];
```

- Uji keanggotaan sebuah elemen di dalam himpunan dilakukan dengan menggunakan opeator *in* seperti contoh berikut:

```
if 'A' in HurufKu then    ...
```

- Di dalam kakas pemrograman *Delphi*, *set* sering digunakan untuk mengindikasikan *flag*. Misalnya himpunan *icon* untuk *window*:

```
type
   TBorderIcon=(biSystemMenu, biMinimize,
                 biMaximaze);
   Huruf = set of TBoderIcon;
```