

Sistem Bilangan Real

- bilangan asli $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- bilangan bulat $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- bilangan rasional : bilangan yang dapat ditulis dengan a/b dengan a dan b keduanya bilangan bulat dan $b \neq 0$.

$$Q = \{a/b \mid a \in Z, b \in Z, b \neq 0\}$$

- bilangan irrasional $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{7}, e$ dan π .

bilangan real : Sekumpulan bilangan rasional dan irrasional beserta negatifnya dan nol

- Hubungan keempat himpunan N, Z, Q , dan R dapat dinyatakan dengan

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

2. Operasi Bilangan

- 1) Hukum komutatif: $x + y = y + x$ dan $xy = yx$.
- 2) Hukum asosiatif: $x + (y + z) = (x + y) + z$ dan $x(yz) = (xy)z$.
- 3) Hukum distributif: $x(y + z) = xy + xz$.
- 4) Elemen-elemen identitas:
Terhadap penjumlahan: 0 sebab $x + 0 = x$.
Terhadap perkalian: 1 sebab $x \cdot 1 = x$.
- 5) Invers (balikan):
Setiap bilangan real x mempunyai invers aditif (disebut juga negatif) $-x$ yang memenuhi $x + -x = 0$ dan setiap bilangan real x yang tidak nol mempunyai invers multiplikatif (disebut juga balikan) yaitu x^{-1} yang memenuhi $x \cdot x^{-1} = 1$.

2. Urutan

- $x < y$ jika dan hanya jika $y - x$ positif.
 $x < y$ mempunyai arti yang sama dengan $y > x$.

Sifat-sifat urutan:

- 1) Trikotomi: Jika x dan y bilangan-bilangan real maka pasti berlaku salah satu di antara yang berikut:
 $x < y$ atau $x = y$ atau $x > y$.
- 2) Transitif: jika $x < y$ dan $y < z$ maka $x < z$.
- 3) Penambahan: $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$
- 4) Perkalian:
Jika z positif maka $x < y \Leftrightarrow xz < yz$
Jika z negatif maka $x < y \Leftrightarrow xz > yz$

Relasi urutan \leq (dibaca "kurang dari atau sama dengan") didefinisikan dengan: $x \leq y$ jika dan hanya jika $y - x$ positif atau nol.

Sifat-sifat ini adalah:

- 1) Transitif: jika $x \leq y$ dan $y \leq z$ maka $x \leq z$.
- 2) Penambahan: $x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z$
- 3) Perkalian:
Jika z positif maka $x \leq y \Leftrightarrow xz \leq yz$
Jika z negatif maka $x \leq y \Leftrightarrow xz \geq yz$

4. Pertidaksamaan




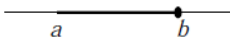
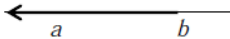

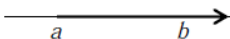
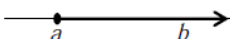
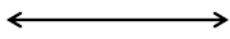
Pertidaksamaan merupakan kalimat terbuka yang menggunakan relasi $<$, $>$, \leq atau \geq

Penyelesaian suatu pertidaksamaan adalah semua bilangan yang memenuhi pertidaksamaan tersebut yang biasanya merupakan interval atau gabungan interval-interval

Interval terbuka (a,b) adalah himpunan semua bilangan real yang lebih besar dari a dan kurang dari b , $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$

interval tertutup $[a,b]$ adalah himpunan semua bilangan real yang lebih besar atau sama dengan a dan kurang atau sama dengan b , $[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$.

Daftar beberapa interval

Penulisan Interval	Penulisan Himpunan	Dalam Garis Bilangan
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid x > a\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	
$(-\infty, \infty)$	R	

• Contoh Pertidaksamaan

- 1) $2x - 7 < 4x - 2$
- 2) $-5 \leq 2x + 6 < 4$
- 3) $x^2 - x - 6 < 0$
- 4) $3x^2 - x - 2 > 0$

5)
$$\frac{2x - 5}{x - 2} \leq 1$$

Contoh 1

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $2x - 7 < 4x - 2$.

Penyelesaian: $2x - 7 < 4x - 2$

$$\Leftrightarrow 2x < 4x + 5$$

$$\Leftrightarrow -2x < 5$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}$$

Hp: interval $(-\frac{5}{2}, \infty) = \{x \mid x > -\frac{5}{2}\}$

Contoh 2

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $-5 \leq 2x + 6 < 4$.

Penyelesaian: $-5 \leq 2x + 6 < 4$

$$\Leftrightarrow -11 \leq 2x < -2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{11}{2} \leq x < -1$$

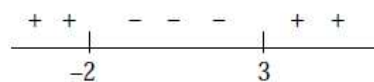
Hp: interval $[-\frac{11}{2}, -1) = \{x \mid -\frac{11}{2} \leq x < -1\}$

Contoh 3

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $x^2 - x - 6 < 0$.

Penyelesaian: $x^2 - x - 6 < 0$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 2) < 0$$



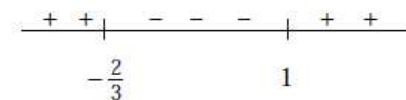
Hp: interval $(-2, 3) = \{x \mid -2 < x < 3\}$

Contoh 4

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $3x^2 - x - 2 > 0$

Penyelesaian: $3x^2 - x - 2 > 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(3x + 2) > 0$$



Hp: interval $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (1, \infty) = \{x \mid x < -\frac{2}{3} \text{ atau } x > 1\}$

Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\frac{2x-5}{x-2} \leq 1$

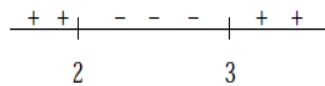
Penyelesaian: $\frac{2x-5}{x-2} \leq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-5}{x-2} - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-5-(x-2)}{x-2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x-2) \leq 0 \text{ dengan syarat } x \neq 2 \text{ (mengapa?)}$$



Hp: interval $(2, 3] = \{x \mid 2 < x \leq 3\}$

5. Nilai Mutlak

Nilai mutlak bilangan real x , ditulis $|x|$ didefinisikan dengan

$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

Misal: $|5| = 5$, $|-5| = -(-5) = 5$, $|0| = 0$

Sifat-sifat nilai mutlak

1) $|ab| = |a||b|$

2) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

3) $|a+b| \leq |a|+|b|$ (ketidaksamaan segitiga)

4) $|a-b| \geq ||a|-|b||$

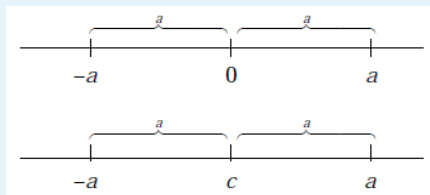
- Pertidaksamaan yang memuat nilai mutlak

Teorema

1. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
2. $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ atau $x > a$.

$|x|$ dapat menyatakan jarak x ke 0, sehingga x yang memenuhi $|x| < a$ menyatakan x yang jaraknya ke 0 kurang dari a .

$|x-c|$ dapat menyatakan jarak x ke c , sehingga x yang memenuhi $|x-c| < a$ menyatakan x yang jaraknya ke c kurang dari a .



- Tentukan penyelesaian $|x| < 3$
- Tentukan penyelesaian pertidaksamaan $|x-2| < 3$
- Tentukan penyelesaian pertidaksamaan $|3x-5| \geq 1$.

Contoh 2

Tentukan penyelesaian pertidaksamaan $|x-2| < 3$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} |x-2| < 3 &\Leftrightarrow -3 < x-2 < 3 \\ &\Leftrightarrow -3+2 < x < 3+2 \\ &\Leftrightarrow -1 < x < 5 \end{aligned}$$

Jadi, penyelesaiannya adalah x yang memenuhi $-1 < x < 5$.

Contoh 3

Tentukan penyelesaian pertidaksamaan $|3x-5| \geq 1$.

Penyelesaian:

$$|3x-5| \geq 1 \Leftrightarrow 3x-5 \leq -1 \text{ atau } 3x-5 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 3x \leq 4 \text{ atau } 3x \geq 6$$

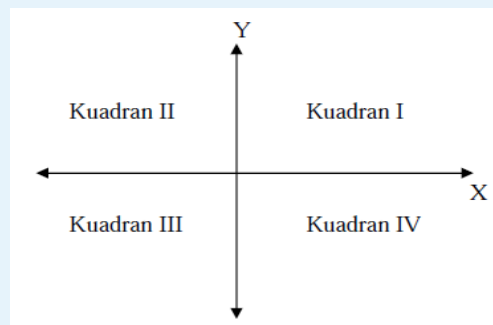
$$\Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3} \text{ atau } x \geq 2$$

Jadi, penyelesaiannya adalah x yang memenuhi $x \leq \frac{4}{3}$ atau $x \geq 2$.

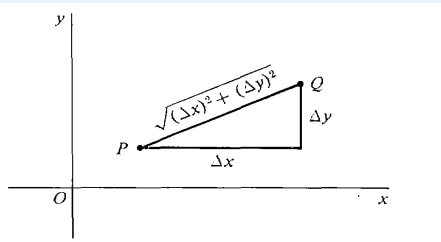
6. Koordinat Kartesius (Kartesian)

Koordinat Kartesius adalah dua garis bilangan riil yang berpotongan saling tegak lurus di titik nolnya, yang satu mendatar (horizontal) dan yang lain tegak (vertikal). Garis yang mendatar dinamakan sumbu X, dan garis yang tegak diberi nama sumbu Y.

Sumbu-sumbu koordinat, yaitu sumbu X dan sumbu Y, membagi bidang datar menjadi 4 daerah yang masing-masing disebut kuadran, yaitu kuadran I, kuadran II, kuadran III, dan kuadran IV.



- Jarak dua titik

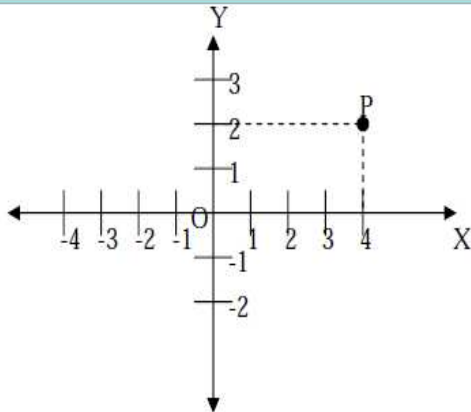


Jarak antar dua titik didefinisikan sebagai

$$\text{distance}(P, Q) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

$$[\text{distance}(P, Q)]^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Rumus diatas didapatkan dari persamaan pythagoras.



titik P berabsis 4 dan berordinat 2. Selanjutnya dikatakan koordinat titik P adalah (4 , 2).