

TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

Fungsi trigonometri (sinus dan cosinus) merupakan fungsi kontinu, sehingga limit fungsi sinus dan cosinus di setiap titik sama dengan nilai fungsinya, yaitu :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \quad \text{dan} \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

Turunan dari fungsi sinus dapat diperoleh dari definisi, yaitu :

$$\frac{d(\sin a)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(a + \frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$\text{Karena } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = 1 \text{ maka } \frac{d(\sin a)}{dx} = \cos a$$

Sedangkan untuk turunan fungsi cosinus diperoleh berikut:

$$\frac{d(\cos a)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin\left(a + \frac{h}{2}\right)}{h} = -\sin a$$

Untuk turunan fungsi trigonometri yang lain dapat diperoleh dengan menerapkan rumus perhitungan turunan :

$$1. \frac{d(\tan x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{dx} = \sec^2 x$$

$$2. \frac{d(\cot x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)}{dx} = -\csc^2 x$$

$$3. \frac{d(\sec x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{dx} = \sec x \tan x$$

$$4. \frac{d(\csc x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{\sin x}\right)}{dx} = -\csc x \cot x$$

Untuk menentukan / menghitung limit fungsi trigonometri di tak hingga dan limit tak hingga , digunakan sifat atau teorema yang diberikan tanpa bukti berikut.

Teorema

Misal $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ berlaku untuk setiap x di dalam domainnya.

Bila $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = L$ maka $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$

Contoh

Hitung limit berikut (bila ada)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \cos x}{\sin x}$

Jawab :

a. Misal $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Dari $-1 \leq \sin x \leq 1$ maka $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$. Karena

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ maka } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

- b. Bila x mendekati nol dari arah kanan maka $1 - \cos x$ mendekati 2, sedangkan nilai $\sin x$ akan mengecil atau mendekati nol. Oleh karena itu, bila 2 dibagi dengan bilangan positif kecil sekali (mendekati nol) maka akan menghasilkan bilangan yang sangat besar (mendekati tak hingga). Jadi $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \infty$

Soal latihan

(Nomor 1 sd 7) Hitung limit fungsi berikut (bila ada)

1. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + \cos x}{\sin x}$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{x}\right)$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin\left(x + \frac{1}{x}\right) - \sin x \right)$