3. TURUNAN, DIFERENSIAL, DAN HAMPIRAN TAYLOR

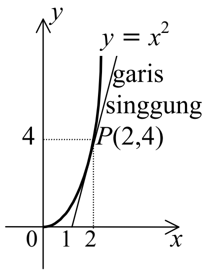
Konsep turunan sebagai bagian utama dari kalkulus dipikirkan pada saat yang bersamaan oleh Newton dan Leibniz dari tahun 1665 sampai dengan tahun 1675 sebagai suatu alat untuk menyelesaikan berbagai masalah dalam geometri dan mekanika. Sir Isaac Newton (1642 - 1727) , ahli matematika dan fisika bangsa Inggris dan Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), ahli matematika bangsa Jerman dikenal sebagai ilmuwan yang menemukan kembali kalkulus. Kalkulus memberikan bantuan tak ternilai pada perkembangan beberapa cabang ilmu pengetahuan lain. Dewasa ini kalkulus digunakan sebagai suatu alat bantu yang utama dalam menyelesaikan berbagai permasalahan ilmu pengetahuan dan teknologi. Selanjutnya, suatu fungsi yang mempunyai turunan sampai tingkat tertentu dapat dihampiri oleh suatu suku banyak, yang dikenal sebagai hampiran Taylor.

3.1. Turunan dan Aturan Menentukannya

3.1.1. Empat Masalah Bertemakan Turunan

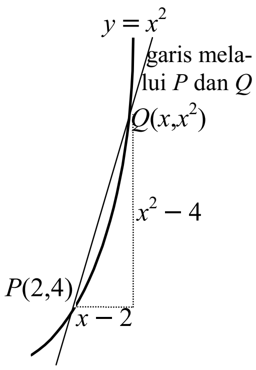
Kita mempunyai empat masalah yang sepintas lalu tidak saling berhubungan. Pertama tentang gradien garis singgung pada suatu kurva, kedua tentang laju sebuah bola yang dijatuhkan tegak lurus dari ketinggian tertentu, ketiga tentang perbesaran oleh lensa, dan keempat tentang rapat massa suatu batang tak homogen. Meskipun versi dari keempat masalah tersebut berbeda, tetapi semuanya mempunyai gagasan matematika yang sama, yaitu tentang konsep turunan fungsi di satu titik.

- ***Masalah Pertama: Gradien Garis Singgung*** Kita akan menentukan besarnya gradi-en garis singgung pada grafik fungsi $y = x^2$ di titik $P(2,4)$.



Gb.1. Garis Singgung

Solusi Masalah Salah satu cara pemecahan masalah ini ada-lah dengan menggambarkan parabol $y = x^2$ secara berhati-hati dan kemudian cobalah menggambarkan garis singgung pada kurva ini di titik $P(2,4)$. Meskipun cara ini masuk akal, tetapi ketelitiannya sangat terbatas, karena di sekitar titik (0,0) ga-latnya (errornya) akan semakin besar. Sekarang kita mencoba cara lain yang ketelitiannya lebih sempurna, yaitu teknik per-hitungan limit fungsi. Untuk ini, perhatikan Gb.2 dengan sak-sama.



Gb.2 Tali Busur Kurva

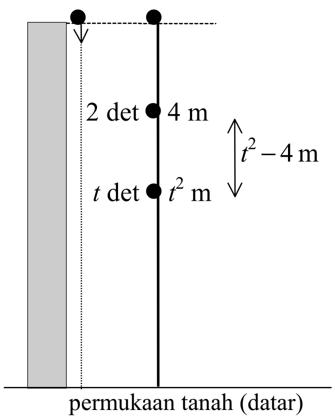
Pilihlah titik $Q(x, x^2)$ dengan x di dekat 2 ($x < 2$ atau $x > 2$, dengan jarak x ke 2 cukup kecil). Gradien talibusur PQ ada-lah

$$\frac{x^2-4}{x-2}.$$

Dengan teknik perhitungan limit fungsi, jika x mendekati 2, maka gradien talibusur PQ akan mendekati garis singgung di titik P. Jadi gradien garis singgung di titik P adalah

$$m_{g.s.} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4.$$

- ***Masalah Kedua: Laju*** Pada suatu medium tertentu, sebuah bola dijatuhkan tegak lu-rus dari suatu ketinggian, dan panjang lintasannya t^2 meter setelah t detik. Kita akan menentukan laju bola tersebut setelah 2 detik.



Gb.3. Bola jatuh

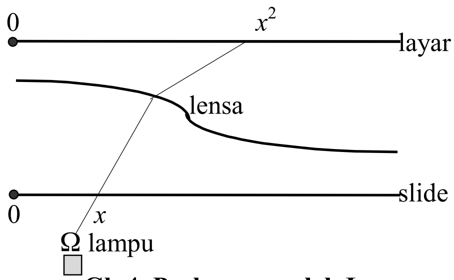
Solusi Masalah Laju rata-rata dari gerakan bola pada selang waktu tertentu adalah hasil bagi dari selisih jarak tempuh dengan selisih waktunya. Ambillah selang waktu $[2,t]$ dengan $t > 2$ (di sini dapat juga selang $[t,2]$, $t < 2$). Pada selang waktu $t - 2$ detik, panjang lintasan bola adalah

$$\frac{t^2-4}{t-2}.$$

Dengan teknik perhitungan limit fungsi, laju bola pada saat $t = 2$ adalah

$$v(2) = \lim_{t\to 2}\frac{t^2-4}{t-2} = \lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t+2)}{t-2} = 4.$$

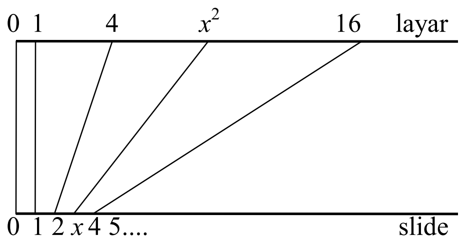
- ***Masalah Ketiga: Perbesaran oleh Lensa*** Masalah ini sering terjadi dalam kehidupan sehari-hari. Seorang pemotret dapat memperbesar atau memperkecil ukuran fotonya dengan suatu faktor. Perbesaran ini dapat dibuat bervariasi dari titik ke titik dengan sebuah cermin yang berbentuk kurva. Jika proyeksi dari suatu selang yang panjangnya L adalah selang dengan panjang L^*, maka faktor perbesarannya adalah L^*/L.



Gb.4. Perbesaran oleh Lensa

Kita mempunyai sebuah lampu, slide, layar berbentuk garis, dan lensa diletakkan seperti pada Gb.4. Sistem ini mengatur proyeksi titik pada slide yang koordinatnya x ke titik pada layar yang koordinatnya x^2. Proyeksi selang $[a,b]$ pada slide adalah selang $[a^2,b^2]$ pada la-yar.

Kita akan menentukan faktor perbesaran di $x = 2$.



Gb.5. Perbesaran oleh Lensa

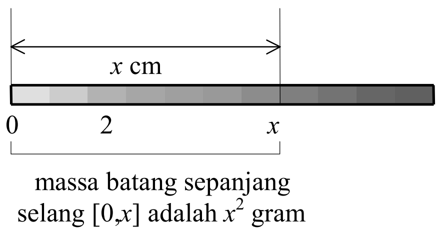
Solusi Masalah Ambillah selang $[2,x]$, atau boleh juga selang $[x,2]$. Proyeksi selang $[2,x]$ pada slide adalah selang $[4,x^2]$ pada layar. Panjang selang $[2,x]$ adalah $L = x - 2$, dan panjang proyeksinya adalah $L^* = x^2 - 4$, se-hingga faktor perbesarannya adalah

$$\frac{L^*}{L} = \frac{x^2-4}{x-2}.$$

Dengan teknik perhitungan limit fungsi, faktor perbesaran di $x = 2$ adalah limit dari faktor perbesaran pada selang $[2,x]$ untuk x mendekati 2, yaitu

$$P(2) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4.$$

- ***Masalah Keempat: Rapat Massa***



Gb.6. Rapat Massa Batang

Sebuah batang tak homogen panjangnya 10 cm. Massa batang dari titik 0 sampai ke titik yang jaraknya x cm dari ujung kiri batang adalah x^2 gram. Massa dari titik 0 sampai ke titik tengahnya adalah 25 gram, dan dari titik 0 sampai ke titik ujung kanannya adalah 100 gram. Semakin ke kanan, rapat massa (massa per satuan panjang) batang semakin besar. Kita akan menentukan rapat massa (gram/cm) di titik $x = 2$ pada batang.

Solusi Masalah Perhatikan rapat massa batang pada selang $[2\,,x]$. Pada selang ini, massa batangnya adalah $x^2 - 4$ gram, sedangkan panjang selangnya adalah $x - 2$ gram, sehingga rapat massanya adalah

$$\frac{x^2-4}{x-2} \text{ gram/cm.}$$

Dengan teknik perhitungan limit fungsi, rapat massa batang di $x = 2$ adalah limit dari rapat massanya pada selang $[2,x]$ untuk x mendekati 2, yaitu

$$\rho(2) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4.$$

Perhatikan gagasan matematika pada pemecahan keempat masalah ini. Jika kita mempunyai fungsi

$$f(x) = x^2,$$

maka besaran yang akan kita cari adalah

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}.$$

Di dalam kalkulus, besaran ini menyatakan laju perubahan nilai fungsi $f(x)$ terhadap x di titik $x = 2$, yang akan kita definisikan sebagai turunan pertama dari fungsi f di $x = 2$.

3.1.2. Turunan di Satu Titik

Secara umum, laju perubahan nilai fungsi $f(x)$ terhadap x di titik $x = c$ adalah

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

Besaran ini kita definisikan sebagai turunan pertama dari fungsi f di $x = c$. Turunan pertama di satu titik didefinisikan sebagai berikut.

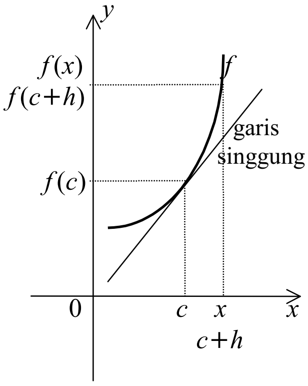
Definisi 3.1 Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat c. *Turunan pertama* (disingkat *turunan*) dari fungsi f di titik c, ditulis $f'(c)$, didefinisikan sebagai

$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c},$$

bila limit ini ada.

Dengan penggantian $x = c + h$, yang mengakibatkan $x \to c \Leftrightarrow h \to 0$ dan $x - c = h$, turunan fungsi f di c dapat dituliskan dalam bentuk

$$f'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}.$$



Gb.7. Turunan Fungsi *f* di *c*

Perhatikan Gb.7 yang memperlihatkan situasi geometri turun-an fungsi f di titik c. Jika

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

ada, maka $f'(c)$ ada, dan kita katakan bahwa *fungsi f terdiferensialkan di c* (*mempunyai turunan/dapat diturunkan/diferensiabel di c*). Arti geometri dari turunan fungsi f di titik c adalah gradien garis singgung pada grafik fungsi f di titik $(c, f(c))$, sedangkan arti fisisnya adalah laju perubahan nilai fungsi f terhadap peubah x di titik c.

Berikut ini contoh perhitungan turunan di satu titik dengan definisinya.

Contoh 3.1 Jika $f(x) = \dfrac{1}{x}$, hitunglah $f'(2)$.

Jawab $$f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{2x(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4}.$$

Cara lain

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2-2-h}{2(2+h)h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4}.$$

Contoh 3.2 Jika $g(x) = x^2 - 3x$, hitunglah $g'(2)$.

Jawab

$$g'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x-1) = 1.$$

Cara lain $$g'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-3(2+h)+2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+h}{h} = \lim_{h\to 0}(h+1) = 1.$$

Pada contoh berikut diperlihatkan beberapa fungsi yang tidak terdiferensialkan di satu titik karena limitnya tak hingga atau beroskilasi.

Contoh 3.3 Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^{1/3}$ tidak terdiferensialkan di titik 0.

Jawab Karena $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{1/3}-0}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2/3}} = \infty$, naka $f'(0)$ tidak ada, sehingga fungsi f tidak terdiferensialkan di titik 0.

Contoh 3.4 Selidiki apakah fungsi $g(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ terdiferensialkan di titik 0.

Jawab Karena $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x} =$ tidak ada, ıaka $g'(0)$ tidak ada, sehingga fungsi g tidak terdiferensialkan di titik 0.

Catatan Dengan penggantian $t = 1/x$, $x \to 0^+ \Leftrightarrow t \to \infty$, $x \to 0^- \Leftrightarrow t \to -\infty$ diperoleh

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \to \pm\infty} \sin t = \text{ tidak ada}.$$

Secara intuitif, situasi ini mudah dilihat karena fungsi sinus yang beroskilasi tidak mempunyai limit untuk peubah yang membesar atau mengecil tanpa batas, yaitu limit di tak hingganya tidak ada. Untuk latihan pembaca, tunjukkan limitnya tidak ada dengan meng-gunakan definisi formal dari limit di tak hingga.

Turunan Kiri dan Turunan Kanan

Sejalan dengan konsep limit kiri dan limit kanan, kontinu kiri dan kontinu kanan, kita mempunyai konsep turunan kiri dan turunan kanan dari suatu fungsi di satu titik.

Definisi 3.2 **1.** Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang $(a,c]$. *Turunan kiri* dari fungsi f di c, ditulis $f'_-(c)$, didefinisikan sebagai

$$f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{atau} \quad f'_-(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h},$$

bila limit ini ada.

2. Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang $[c,b)$. *Turunan kanan* dari fung-si f di c, ditulis $f'_+(c)$, didefinisikan sebagai

$$f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{atau} \quad f'_+(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h},$$

bila limit ini ada.

Hubungan antara turunan di satu titik dengan turunan kiri dan turunan kanannya diberikan oleh teorema berikut.

Teorema 3.3 Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat c. Maka

$$\text{fungsi } f \text{ terdiferensialkan di } c \Leftrightarrow f'_-(c) = f'_+(c).$$

Catatan Penggunaan teorema ini : Jika $f'_-(c) \neq f'_+(c)$, maka fungsi f tidak terdiferensialkan di c. Jika fungsi f terdiferensialkan di c, maka $f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c)$.

Sebaliknya, jika $f'_-(c) = f'_+(c)$, maka fungsi f terdiferensialkan di c dengan $f'(c) = f'_-(c) = f'_+(c)$.

Catatan di atas menyatakan bahwa untuk fungsi yang terdiferensialkan di satu titik, turunan kiri atau turunan kanan di titik itu sama dengan turunannya. Dalam kasus turunan kiri dan turunan kanan di satu titik tidak sama, fungsinya tidak mungkin terdiferensialkan di titik itu, perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.5 Selidiki apakah fungsi $f(x) = |x|$ terdiferensialkan di titik 0.

Jawab Dalam bentuk tanpa nilai mutlak, aturan fungsi f ditulis

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \ , & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Turunan kiri fungsi f di titik 0 adalah

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1,$$

sedangkan turunan kanannya adalah

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1.$$

Karena $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, maka $f'(0)$ tidak ada, yaitu fungsi f tidak terdiferensialkan di 0.

Contoh 3.6 Selidiki apakah fungsi $g(x) = \sqrt{x \sin x}$ terdiferensialkan di titik 0.

Jawab Pilihlah selang terbuka $I = (-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi) \subseteq D_f$ yang memuat titik 0. Untuk $x < 0$ dan $x \in I$ berlaku

$$\sqrt{x \sin x} = \sqrt{-x}.\sqrt{-\sin x} \qquad \text{dan} \qquad x = -\sqrt{-x}.\sqrt{-x}\,,$$

akibatnya

$$\begin{aligned} g'_-(0) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{x \sin x} - 0}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{-x}.\sqrt{-\sin x}}{-\sqrt{-x}.\sqrt{-x}} = -\lim_{x \to 0^-} \sqrt{\frac{\sin x}{x}} = -1. \end{aligned}$$

Untuk $x > 0$ dan $x \in I$ berlaku

$$\sqrt{x \sin x} = \sqrt{x}.\sqrt{\sin x} \qquad \text{dan} \qquad x = \sqrt{x}.\sqrt{x}\,,$$

akibatnya

$$g'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x \sin x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}.\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}.\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{\sin x}{x}} = 1.$$

Karena $g'_{-}(0) \neq g'_{+}(0)$, maka $g'(0)$ tidak ada, yaitu fungsi g tidak terdiferensialkan di 0.

Hubungan antara Fungsi Terdiferensialkan dengan Kekontinuannya

Jika fungsi f terdiferensialkan di c, maka turunan fungsi f di c ditentukan oleh

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Perhatikan bentuk limit ini, di sini limit penyebutnya nol. Karena $f'(c)$ ada, yaitu limit bentuk pecahannya ada, maka limit pembilangnya juga harus nol. (Andaikan limit ini tidak nol, maka limit bentuk pecahannya pasti $\pm\infty$, yang bertentangan dengan $f'(c)$ ada). Akibatnya, $\lim_{x \to c} \left(f(x) - f(c)\right) = 0$, yang berarti bahwa fungsi f kontinu di 0.

Jadi sekarang kita mempunyai teorema berikut tentang hubungan antara keterdiferensialan fungsi di satu titik dengan kekontinuannya di titik itu.

Teorema 3.4 Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang terbuka I yang memuat c. Jika fungsi f terdiferensialkan di c, maka fungsi f kontinu di c.

Bukti Karena

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c) + f(c) \right) = f'(c).0 + f(c) = f(c),$$

maka fungsi f kontinu di c.■

Catatan
- Salah satu penggunaan teorema ini, jika suatu fungsi tidak kontinu di satu titik, maka fungsinya tidak mungkin terdiferensialkan di titik itu.
- Kebalikan teorema ini tidak benar, ini berarti terdapat suatu contoh fungsi yang kontinu di satu titik tetapi tidak terdiferensialkan di titik itu. Ambillah fungsi $f(x) = |x|$. Fungsi ini kontinu di 0 berdasarkan Teorema 2.15.1 di halaman 61, tetapi tidak terdiferensialkan di 0 berdasarkan Contoh 3.5.

Salah satu penggunaan Teorema 3.4 adalah tentang bentuk aturan suatu fungsi agar fungsi tersebut terdiferensialkan di satu titik, seperti diperlihatkan contoh berikut.

Contoh 3.7 Tentukan konstanta a dan b agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x}, & 0 < x \leq 2 \\ x^2 + bx, & x > 2 \end{cases}$$

terdiferensialkan di $x = 2$.

Jawab Agar fungsi f terdiferensialkan di $x = 2$, syaratnya adalah fungsi f kontinu di 2 dan $f'_{-}(2) = f'_{+}(2) = f'(2)$. Syarat fungsi f kontinu di $x = 2$ memberikan

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2), \qquad \text{atau} \qquad \lim_{x \to 2^-} \frac{a}{x} = \lim_{x \to 2^+} (x^2 + bx) = \frac{a}{2},$$

karena $f(2) = \frac{a}{2}$. Dari sini diperoleh $\frac{a}{2} = 4 + 2b$, sehingga $a = 8 + 4b$.

Syarat $f_-'(2) = f_+'(2) = f'(2)$ memberikan

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\frac{a}{x}-\frac{a}{2}}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+bx-4-2b}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2a-ax}{2x(x-2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+b+2)}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{-a(x-2)}{2x(x-2)} = \lim_{x\to 2^+} (x+b+2)$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{-a}{2x} = \lim_{x\to 2^+} (x+b+2).$$

Dari sini diperoleh $\frac{-a}{4} = 4 + b$, sehingga $a = -4b - 16$. Dari hasil sebelumnya, $a = 8 + 4b$. Gantikan hasil ini, diperoleh $8 + 4b = -4b - 16$, yang menghasilkan $8b = -24$, sehingga $b = -3$ dan $a = 8 + 4b = 8 - 12 = -4$.

3.1.3. Turunan Fungsi pada suatu Selang

Turunan fungsi pada suatu selang dikenal juga sebagai *fungsi turunan pertama*, atau disingkat *turunan pertama*, definisinya sebagai berikut.

Definisi 3.5 Misalkan fungsi $y = f(x)$ terdefinisi pada selang I. *Turunan fungsi f pada selang I*, ditulis f', adalah suatu fungsi yang aturannya di setiap $x \in I$ ditentukan oleh

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}, \qquad \text{atau} \qquad f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

bila limit ini ada.

Catatan
- Lambang lain untuk turunan adalah y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$, $D_x y$, $D_x f(x)$.
  Lambang $\frac{dy}{dx}$ dikenal sebagai *notasi Leibniz*.
- Bila I adalah selang tertutup $[a,b]$, maka $f'(a)$ berarti $f_+'(a)$, sedangkan $f'(b)$ berarti $f_-'(b)$.

Turunan fungsi pada suatu selang dapat ditentukan langsung dengan Definisi 3.5. Pada berbagai fungsi elementer, perhitungan limitnya seringkali sukar dikerjakan. Untuk keperluan menentukan turunan, nantinya kita akan merancang berbagai aturan, sehingga dengan aturan itu proses perhitungan limit yang rumit dalam menentukan turunan dapat dihindari.

Aturan dari turunan pertama fungsi *f* terdefinisi pada daerah asal fungsi *f*, kecuali mungkin di sejumlah berhingga titik. Di suatu titik pada daerah asal fungsinya di mana aturan turunan tidak dapat menjangkau titik itu, turunannya dihitung secara langsung dengan definisi turunan di satu titik (termasuk turunan kiri atau kanan). Pada contoh berikut, kita akan menentukan turunan dari fungsi akar kuadrat secara langsung dengan menggunakan definisinya. Meskipun fungsinya terdefinisi di titik 0, tetapi turunannya tidak terdefinisi di titik itu.

Contoh 3.8 Tentukan turunan dari fungsi $f(x) = \sqrt{x}$.

Jawab Daerah asal fungsi *f* adalah $[0,\infty)$. Berdasarkan definisi turunan,

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{\sqrt{t}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{t}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{t}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{t\to x}\frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x>0.$$

Karena

$$f'(0) = f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-0}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}} = \infty,$$

maka fungsi *f* tidak terdiferensialkan di 0. Jadi turunan fungsi *f* adalah

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x > 0.$$

Dengan notasi Leibniz, hasil ini dapat ditulis dengan lambang

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0.$$

Cara lain

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x>0. \end{aligned}$$

Turunan Fungsi Sinus dan Kosinus

Turunan fungsi sinus dan kosinus diperoleh langsung dengan menggunakan definisi turunan. Pembuktiannya memerlukan beberapa rumus trigonometri SMU.

Teorema 3.6. **(1)** $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ **(2)** $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \in \boldsymbol{R}$.

Bukti $\frac{d}{dx}(\sin x) = \lim\limits_{t \to x} \frac{\sin t - \sin x}{t - x} = \lim\limits_{t \to x} \frac{2 \cos\frac{1}{2}(t+x) \sin\frac{1}{2}(t-x)}{2.\frac{1}{2}(t-x)}$

$$= \left(\lim_{t \to x} \cos\tfrac{1}{2}(t+x)\right)\left(\lim_{t \to x} \frac{\sin\frac{1}{2}(t-x)}{\frac{1}{2}(t-x)}\right) = \cos x.$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{t \to x} \frac{\cos t - \cos x}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{-2 \sin\frac{1}{2}(t+x) \sin\frac{1}{2}(t-x)}{2.\frac{1}{2}(t-x)}$$

$$= -\left(\lim_{t \to x} \sin\tfrac{1}{2}(t+x)\right)\left(\lim_{t \to x} \frac{\sin\frac{1}{2}(t-x)}{\frac{1}{2}(t-x)}\right) = -\sin x.$$

3.1.4. Aturan untuk Menentukan Turunan

Kita dapat menentukan turunan tanpa proses limit. Untuk keperluan ini dirancang teorema tentang turunan dari operasi aljabar pada dua fungsi, aturan rantai untuk turunan fungsi komposisi, dan turunan fungsi invers. Dengan menggunakan konsep turunan, hu-bungan turunan dengan kekontinuannya, dan berbagai sifat yang telah dipelajari sebelum-nya kita dapat membuktikan teorema berikut.

Teorema 3.7, ***Aturan untuk Menentukan Turunan***

A. Turunan jumlah, selisih, hasil kali, dan hasil bagi dua fungsi.

Misalkan fungsi f dan g terdiferensialkan pada selang I, maka fungsi $f+g, f-g, fg$, f/g ($g(x) \neq 0$ pada I) terdiferensialkan pada I dengan aturan sebagai berikut.

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
3. $(fg)'(x) = f(x)\,g'(x) + g'(x)\,f(x)$
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Aturan ini dapat ditampilkan dalam bentuk populer, atau dengan notasi Leibniz.

1. $(u+v)' = u' + v'$
2. $(u-v)' = u' - v'$
3. $(uv)' = uv' + vu'$
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$

1. $\dfrac{d}{dx}(u+v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$
2. $\dfrac{d}{dx}(u-v) = \dfrac{du}{dx} - \dfrac{dv}{dx}$
3. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$
4. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

B. Turunan fungsi trigonometri

1. $\dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
2. $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
3. $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
4. $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
5. $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
6. $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

C. Aturan Rantai Misalkan fungsi f dan g memenuhi $R_g \subseteq D_f$ dengan D_g suatu selang. Jika fungsi g terdiferensialkan pada $D_g = D_{g\circ f}$, dan fungsi f terdiferensiakan pada R_g, maka fungsi $f\circ g$ terdiferensialkan pada $D_{g\circ f}$ dengan aturan

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x).$$

Kita akan menggunakan notasi Leibniz untuk aturan rantai. Tulislah fungsinya sebagai $y = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$, maka turunannya adalah $y' = (f \circ g)(x) = f'\big(g(x)\big)\, g'(x)$. Kita misalkan $u = g(x)$, maka turunannya adalah

$$g'(x) = \frac{du}{dx}.$$

Dari $y = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(u)$ diperoleh

$$(f \circ g)'(x) = \frac{dy}{dx} \qquad \text{dan} \qquad f'\big(g(x)\big) = f'(u) = \frac{dy}{du}.$$

Jadi aturan rantai dalam bentuk notasi Leibniz adalah

$$y = y(u),\ u = u(x),\ y',\ u' \text{ ada } \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

Aturan ini dapat dituliskan sebagai diagram berikut.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
y = y(u(x))\ \ y \arrow[r, bend left, "\frac{dy}{du}\text{ ada}"] \arrow[rr, bend right, "\frac{dy}{dx}\text{ ada, dengan } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}"'] & u \arrow[l, "y = y(u)"'] \arrow[r, bend left, "\frac{du}{dx}\text{ ada}"] & x \arrow[l, "u = u(x)"']
\end{tikzcd}$$

D. *Turunan fungsi invers* Misalkan fungsi f kontinu dan satu-satu pada selang $I = D_f$ dengan aturan $y = f(x)$, $x \in I$, dan inversnya adalah $x = f^{-1}(y)$, $y \in R_f$. Jika fungsi f terdiferensialkan pada I dengan $f'(x) \neq 0$ pada I, maka fungsi f^{-1} juga terdiferensialkan pada R_f, dan aturan turunannya ditentukan oleh

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}, \qquad \text{atau} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}.$$

E. *Turunan fungsi $y = x^r$, r bilangan rasional* $\dfrac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$, r bilangan rasional.

Bukti • Untuk r bilangan asli **:** $y = x^r$, r bilangan asli. Di sini

$$y' = \lim_{t \to x} \frac{t^r - x^r}{t - r} = \lim_{t \to x} \underbrace{\left(t^{r-1} + t^{r-2}x + \ldots + x^{r-1}\right)}_{r \text{ suku}} = rx^{r-1}.$$

• Untuk $r = 0$ **:** $y = x^0 = 1, x \neq 0$. Di sini $y' = 0 = 0.x^{r-1}, x \neq 0$.

• Untuk r bilangan bulat negatif **:** $y = x^r = 1/x^s$, $s = -r$, s bilangan asli, $x \neq$ 0.

Di sini $y' = \dfrac{x^s.0 - 1.sx^{s-1}}{x^{2s}} = -sx^{-s-1} = rx^{r-1}, x \neq 0.$

Jadi rumus $\dfrac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$ benar untuk r bilangan bulat.

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{du}} = \frac{1}{qu^{q-1}} = \frac{1}{q\left(x^{1/q}\right)^{q-1}} = \frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}.$$

- Untuk r bilangan rasional, kita mempunyai

$$y = x^r = x^{p/q} = (x^{1/q})^p,\ p \text{ bilangan bulat, dan } q \text{ bilangan asli.}$$

Misalkan $u = x^{1/q}$, maka $x = u^q$, dengan $\frac{dx}{du} = qu^{q-1}$. Aturan turunan fungsi invers memberikan

Dengan penggantian $u = x^{1/q}$ ini, kita mempunyai $y = u^p$ dengan p bilangan bulat, sehingga berdasarkan hasil sebelumnya diperoleh

Berdasarkan aturan rantai,

Jadi rumus $\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$ benar untuk r bilangan rasional. ∝

Catatan Rumus ini dapat diperluas untuk r bilangan real, dengan syarat $x > 0$.

Ilustrasi 3.9 Berdasarkan rumus ini, $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Dari hasil ini dan aturan rantai diperoleh

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\sin x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}.\cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

Contoh 3.10 Hitunglah $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 \sin x}{x+1}\right)$.

Jawab Dengan menggunakan rumus turunan hasil kali dua fungsi, turunan suku banyak, dan turunan sinus diperoleh

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 \sin x\right) = x^2 \cos x + 2x \sin x.$$

Kemudian, gunakan rumus turunan hasil bagi dua fungsi dan hasil ini, maka diperoleh

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 \sin x}{x+1}\right) = \frac{(x+1)\frac{d}{dx}\left(x^2 \sin x\right) - \left(x^2 \sin x\right)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)\left(x^2 \cos x + 2x \sin x\right) - x^2 \sin x}{(x+1)^2}.$$

Contoh 3.11 Tunjukkan bahwa fungsi $y = \dfrac{1+x}{x}$ memenuhi persamaan $y' + (y-1)^2 = 0$.

Jawab Tulislah

$$y = \frac{1+x}{x} = \frac{1}{x} + 1, \text{ maka } y' = -\frac{1}{x^2} \text{ dan } (y-1)^2 = \frac{1}{x^2}.$$

Dari sini diperoleh

$$y' + (y-1)^2 = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0,$$

dan terbuktilah yang diinginkan. ■

Contoh 3.12 Hitunglah $\dfrac{d}{dx}(|x|)$ dan tunjukkan fungsi $y = |x|$ memenuhi $yy' = x$, $x \neq 0$.

Jawab Dengan menggunakan Aturan Rantai dan rumus $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{u}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ diperoleh

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x^2}}.\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|}.$$

Kita telah membuktikan bahwa turunan fungsi $y = |x|$ adalah $y' = x/|x|$. Berdasarkan ini diperoleh

$$yy' = |x|.\frac{x}{|x|} = x,\ x \neq 0,$$

dan terbuktilah yang diinginkan. ■

Contoh 3.13

Buktikan bahwa turunan fungsi $y = (\sin x)\sqrt{\cos 2x}$ dapat ditulis sebagai $y' = \dfrac{\cos 3x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

Jawab Dengan menggunakan rumus turunan hasil kali dua fungsi, turunan fungsi akar kuadrat, aturan rantai, turunan sinus, turunan kosinus, dan rumus trigonometri diperoleh

$$\begin{aligned} y' &= \sin x.\frac{-2\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}} + \sqrt{\cos 2x}\cos x = \frac{-\sin x \sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}} + \sqrt{\cos 2x}\cos x \\ &= \frac{-\sin 2x \sin x + \cos 2x \cos x}{\sqrt{\cos 2x}} = \frac{\cos(2x+x)}{\sqrt{\cos 2x}} = \frac{\cos 3x}{\sqrt{\cos 2x}}. \end{aligned}$$

Dengan demikian terbuktilah yang diinginkan. ■

Contoh 3.14 Tentukan turunan fungsi $f(x) = x^{1/3} \sin x$.

Jawab Daerah asal fungsi f adalah $\boldsymbol{R}$. Dengan aturan menentukan turunan diperoleh

$$f'(x) = x^{1/3}\cos x + \tfrac{1}{3}x^{-2/3}\sin x,\ x \neq 0,$$

dan

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{1/3}\sin x - 0}{x} = \lim_{x\to 0}x^{1/3}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 0.1 = 0.$$

Jadi turunan fungsi $f(x) = x^{1/3} \sin x$ adalah

$$f'(x) = \begin{cases} x^{1/3}\cos x + \frac{1}{3}x^{-2/3}\sin x &, x \neq 0 \\ 0 &, x = 0 \end{cases}.$$

Pada Contoh 3.14 kita melihat bahwa ada atau tidaknya $f'(0)$ tidak ditentukan dari aturan turunan $f'(x)$. Di sini aturan $f'(x)$ hanya berlaku untuk $x \neq 0$, dan tidak memberi informasi apapun tentang ada atau tidaknya $f'(0)$. Untuk latihan pembaca, perlihatkan bahwa fungsi f' pada Contoh 3.14 masih kontinu di setiap titik pada $\boldsymbol{R}$. Pada contoh berikut kita akan melihat sebuah fungsi yang terdiferensialkan di satu titik, tetapi turunannya tidak kontinu di titik itu.

Contoh 3.15 Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 &, x = 0 \end{cases}$ terdiferensialkan di 0, tetapi turunan fungsinya f' tidak kontinu di 0.

Jawab Dengan menggunakan rumus turunan fungsi diperoleh

$$f'(x) = x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2x\sin\frac{1}{x} = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},$$

dan

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Hasil terakhir diperoleh dengan prinsip apit. Karena $0 \leq \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|$ dengan limit pengapitnya nol, maka $\lim_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right| = 0$, sehingga berdasarkan rumus limit nilai mutlak diperoleh

$$\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Karena $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ tidak ada (Lihat Catatan pada Contoh 3.4), maka $\lim_{x\to 0} f'(x)$ idak ada.

Akibatnya, fungsi f' tidak kontinu di 0. ■

Contoh 3.16 Diketahui fungsi $f(x) = \tan^3 x$. hitunglah $f'(x^2 + 1)$ dan $\frac{d}{dx}\left(f(x^2+1)\right)$.

Jawab Dari $f(x) = \tan^3 x$ diperoleh

$$f'(x) = \left(3\tan^2 x\right).\frac{d}{dx}(\tan x) = 3\tan^2 x \sec^2 x$$

sehingga

$$f'(x^2 + 1) = 3\tan^2 (x^2 + 1)\sec^2 (x^2 + 1).$$

Gunakan aturan rantai untuk menentukan turunan fungsi $f(x^2 + 1)$ kemudian aturan fung-si f' untuk $x^2 + 1$, diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(f(x^2+1)\right) &= f'(x^2+1).\frac{d}{dx}(x^2+1) = 2x\, f'(x^2+1)\\ &= 2x\left(3\tan^2(x^2+1)\sec^2(x^2+1)\right)\\ &= 6x\tan^2(x^2+1)\sec^2(x^2+1).\end{aligned}$$

Cara lain Dari aturan fungsi f diperoleh $f(x^2 + 1) = \tan^3 (x^2 + 1)$, kemudian tentukan turunan ruas kiri dan ruas kanan untuk memperoleh hasil yang diinginkan.

Contoh 3.17 Misalkan fungsi f terdiferensialkan pada selang $(0,\infty)$ dengan $f'(x) = 1/x\ \forall\, x > 0$, dan fungsi g terdiferensialkan pada $\boldsymbol{R}$ dengan $g(x) > 0\ \forall\, x \in \boldsymbol{R}$. Jika fungsi f dan g memenuhi $(f \circ g)(x) = x\ \forall\, x \in \boldsymbol{R}$, buktikan bahwa $g'(x) = g(x)\ \forall\, x \in \boldsymbol{R}$.

Jawab Dari hubungan $(f \circ g)(x) = x\ \forall\, x \in \boldsymbol{R}$ dengan fungsi f terdiferensialkan pada selang $(0,\infty)$ dan fungsi g terdiferensialkan pada $\boldsymbol{R}$ diperoleh

$$\frac{d}{dx}((f\circ g)(x)) = \frac{d}{dx}(x).$$

Ini mengakibatkan

$$f'(g(x)).g'(x) = 1.$$

Karena $g(x) > 0\ \forall\, x \in \boldsymbol{R}$ dan $f'(x) = 1/x\ \forall\, x > 0$, maka $f'(g(x)) = 1/g(x)$, sehingga dari aturan rantai di atas kita mempunyai

$$\frac{1}{g(x)}.g'(x) = 1\ \forall\, x \in \boldsymbol{R}.$$

Dari sini diperoleh

$$g'(x) = g(x)\ \forall\, x \in \boldsymbol{R},$$

dan terbuktilah yang diinginkan. ∝

Pada contoh berikut akan dibahas cara menentukan turunan dari fungsi invers tanpa menentukan terlebih dahulu aturan fungsi inversnya.

Contoh 3.18 Tanpa menentukan aturan invers fungsinya terlebih dahulu, tentukan turunan dari invers fungsi $y = f(x) = 4x - x^2, x \geq 2$.

Jawab Dari $y = f(x) = 4x - x^2, x \geq 2$ diperoleh $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 4 - 2x$. Berdasarkan rumus turunan fungsi invers,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{4-2x} = \frac{-1}{2(x-2)},\ x \geq 2.$$

Sekarang kita nyatakan ruas kanan sebagai fungsi dari y. Aturan fungsi f dapat ditulis sebagai $y = 4 - (x - 2)^2$, sehingga $(x - 2)^2 = 4 - y$. Karena $x \geq 2$, maka $x - 2 \geq 0$, ini mengakibatkan $x - 2 = \sqrt{4-y}$. Akibatnya, turunan dari invers fungsi $y = f(x) = 4x - x^2, x \geq 2$ adalah

$$(f^{-1})'(y) = \frac{-1}{2\sqrt{4-y}}.$$

3.1.5. Soal Latihan

1. Diketahui fungsi
$$f(x) = x|x| - 2x.$$
Hitunglah $f'(2)$ kemudian selidiki fungsi f apakah terdiferensialkan di $x = 0$.

2. Selidiki apakah fungsi
$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2, & x \leq 2 \\ 4x - 8, & x > 2 \end{cases}$$
terdiferensialkan di $x = 2$.

5. Tentukan konstanta a dan b agar fungsi
$$f(x) = \begin{cases} a/x, & 0 < x \leq 1 \\ bx^2 - x, & x > 1 \end{cases}$$
terdiferensialkan di $x = 1$.

6. Tentukan konstanta a dan b agar fungsi
$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x+3}, & 0 < x \leq 1 \\ x^2 - bx, & x > 1 \end{cases}$$
terdiferensialkan di $x = 1$.

7. Selidiki apakah fungsi $f(x) = x(|x| - 1)$ terdiferensialkan di setiap bilangan real x.

8. Selidiki apakah fungsi $f(x) = |x|(x - 2)$ terdiferensialkan di setiap bilangan real x.

9. Selidiki apakah fungsi
$$f(x) = x^2(|x - 1| - 3)$$
terdiferensialkan di setiap bilangan real x.

3. Selidiki apakah fungsi
$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x, & x < 0 \\ x^2 + x, & x \geq 0 \end{cases}$$
terdiferensialkan di $x = 0$

4. Tentukan konstanta a dan b agar fungsi
$$f(x) = \begin{cases} 2x + a, & x \leq 5 \\ x^2 - bx, & x > 5 \end{cases}$$
terdiferensialkan di $x = 5$.

13. Tentukan turunan dari fungsi
$$f(x) = \frac{1+\cos x}{x \sin x}.$$

14. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2}}$ memenuhi persamaan
$$x(x^2 + 2)y' = 2y.$$

15. Jika $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos(x^2 + 1)$, dan jika $h = f \circ g$, tentukan turunan dari fungsi h.

16. Jika $f(x) = x \tan\sqrt{x}$ dan $g(x) = f(x^2)$, tentukan $g'(x)$ dan $f'(x^2)$.

17. Misalkan fungsi f terdiferensialkan pada selang terbuka I yang memuat 1. Jika $g(x) = x f(x^2)\ \forall x \in I$, dan $f(1) = f'(1) = 1$, hitunglah $g'(1)$.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ 1 - x^2, & 0 < x \leq 2 \\ \sqrt{2x} - 5, & x > 2 \end{cases}$$

10. Selidiki apakah fungsi

terdiferensialkan di setiap bilangan real x.

11. Tentukan turunan dari fungsi

$$f(x) = (x - \sin x)(x + \cos x).$$

12. Tentukan turunan dari fungsi

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos 2x}.$$

18. Misalkan fungsi f, g, dan h terdiferensial-kan pada selang terbuka I. Jika $F = f\,g\,h$, buktikan bahwa fungsi F juga terdiferensi-alkan pada I dengan aturan

$$F'(x) = ((f'gh)(x) + (fg'h)(x) + (fgh')(x)$$

19. Pada fungsi yang terdiferensialkan, bukti-kan bahwa turunan dari fungsi genap ada-lah fungsi ganjil, dan turunan dari fungsi ganjil adalah fungsi genap.

20. Misalkan fungsi f dan g terdiferensialkan sehingga fungsi $f \circ g$ terdefinisi pada suatu selang. Jika g adalah fungsi genap, bukti-kan bahwa $(f \circ g)'(0) = 0$.