

# **DIKTAT MATEMATIKA II**

**(FUNGSI PRODUKSI)**



**Drs. A. NABABAN**

**PURNAWAN, M.T**

**JURUSAN PENDIDIKAN TEKNIK MESIN  
FAKULTAS PENDIDIKAN TEKNOLOGI DAN KEJURUAN  
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA**

**2004**

## FUNGSI PRODUKSI

Dalam usaha produksi senantiasa dilibatkan modal, baik berupa uang maupun barang modal seperti mesin-mesin, dan tenaga kerja. Pengusaha ingin mendapat penerimaan (Total Revenue = TR) maksimum dan biaya (Cost) minimum, agar diperoleh laba (Net Revenue = NR) yang maksimum pula. Net Revenue yang maksimum diperoleh dengan efisiensi ( tenaga kerja/manusia, dana dan waktu yang minimum) dan efektivitas (hasil guna) yang maksimum.

Jika C ( Capital = modal ) dan L ( Labour = tenaga kerja ) dan Q (Quantity output = produksi), maka  $Q = f(C,L)$  atau  $z = f(x,y)$ . Pada umumnya fungsi homogen (berderajat sama), misalnya :  $f(x,y,z) = z^2 + x^2 + 3y^2 - 6xy = 0$  ( berderajat dua ).

### Contoh :

Sebuah pabrik tekstil mengoperasikan x puluh set mesin, mempekerjakan y ratus karyawan, memproduksi z ribu meter tekstil per bulan. Ketiga variabel itu mempunyai hubungan :

$$z = f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey$$

ada mulanya dioperasikan 100 mesin, dipekerjakan 100 karyawan, diproduksi 854 ribu meter tekstil perbulan, ditulis  $f(10,1) = 854$ . selanjutnya dipasang mesin-mesin dan direkrut karyawan-karyawan berturut-turut  $f(20,3) = 1490$  ;  $f(25,4) = 1757$ ;  $f(30,6) = 1944$  dan  $f(35,8) = 2105$ .

1. Tentukanlah fungsi produksi  $Z=f(x,y)$
2. Apakah perusahaan itu mencapai produksi maksimum ? jika ya, bila mana dicapai produksi maksimum?
3. Tentukanlah X dan Y agar Z maksimum. Hitung berapa set mesin-mesin dan berapa orang karyawan dipekerjakan untuk produksi maksimum itu.
4. Jika ternyata 5% produksi rusak / gagal, sedang yang baik dijual cepat, Rp 4000/meter tentukanlah total refenue.
5. Jika Average Cost ( AC ) Rp 3500/meter tentukanlah Total Cost ( TC ), kemudian hitunglah Net Refenue ( laba ) maksimum per bulan.
6. Jika  $x = 50$  hitunglah y dan z maksimum.

**Jawab :**

$$f(10,1) = 100a + 10b + c + 10d + e = 854$$

$$f(20,3) = 400a + 60B + 9c + 20d + 3e = 1490$$

$$f(25,4) = 625a + 100b + 16c + 25d + 4e = 1757$$

$$f(30,6) = 900a + 180b + 36c + 30d + 6e = 1944$$

$$f(35,5) = 1225a + 280b + 64c + 35d + 8e = 2105$$

1) Sistem persamaan linier ini diselesaikan dengan operasi baris :

$$\begin{pmatrix} 100 & 10 & 1 & 10 & 1 \\ 400 & 60 & 9 & 20 & 3 \\ 625 & 100 & 16 & 25 & 4 \\ 900 & 180 & 36 & 30 & 6 \\ 1225 & 280 & 64 & 35 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 854 \\ 1490 \\ 1747 \\ 1944 \\ 2105 \end{pmatrix}$$

$$b_2 - 4b_1; 4b_3 - 25b_1; b_4 - 9b_1; 4b_5 - 49b_1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 100 & 10 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 20 & 5 & -20 & -1 \\ 0 & 150 & 37 & -150 & -9 \\ 0 & 90 & 27 & -60 & -3 \\ 0 & 630 & 207 & -350 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 854 \\ -1926 \\ -4322 \\ -5742 \\ -33426 \end{pmatrix}$$

$$2b_3 - 15b_2; 2b_4 - 9b_2; 2b_5 - 63b_2$$

$$\begin{pmatrix} 100 & 10 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 20 & 5 & -20 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & 60 & 3 \\ 0 & 0 & 99 & 567 & 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 854 \\ -1926 \\ 246 \\ 5850 \\ 154486 \end{pmatrix}$$

$$b_4 - 3b_3; b_5 - 33b_3; b_4 : 12; b_5 : 16; b_3 : 3$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 100 & 10 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 20 & 5 & -20 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 35 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 854 \\ -1926 \\ 82 \\ 426 \\ 2898 \end{pmatrix}$$

$$b_5 - 7b_4$$

$$\begin{pmatrix} 100 & 10 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 20 & 5 & -20 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 854 \\ -1926 \\ 82 \\ 426 \\ -84 \end{pmatrix}$$

$$b_1 - b_5; b_2 + b_5; b_3 + b_5; b_4 - b_5; b:5$$

Dengan menghitung  $e = -84$ , kemudian substitusi mendapat  $d$ , substitusi lagi mendapatkan  $c$ , substitusi mendapatkan  $b$  dan terakhir substitusi mendapat  $a$ .

$$E = -84: 5d - 84 = 426 \rightarrow 5d = 510 \rightarrow d = 102; c + 84 = 82 \rightarrow c = -2;$$

$$20B - 10 - 2040 + 84 = -1926 \rightarrow 20b = 40 \rightarrow b = 2;$$

$$100a + 20 - 2 + 1020 - 84 = 854 \rightarrow 100a = -100 \rightarrow a = -1$$

$$Z = f(x,y) = -x^2 + 2xy - 2y^2 + 102x - 84y$$

$$2) \frac{dz}{dx} = -2x + 2y + 102 = 0 \rightarrow \frac{d^2z}{dx^2} = -2 < 0; \frac{d^2z}{dxdy} = 2$$

$$\frac{dz}{dy} = 2x - 4y - 84 = 0 \rightarrow \frac{d^2z}{dy^2} = -4 < 0$$

$$\left( \frac{d^2z}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2z}{dy^2} \right) - \left( \frac{d^2z}{dxdy} \right)^2 = (-2)(-4) - (2)^2 = 8 - 4 = 4 > 0 \rightarrow z \text{ mencapai maksimum.}$$

$$3) \text{ Dari } \frac{dz}{dx} = -2x + 2y + 102 = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{dz}{dy} = 2x - 84 = 0$$

didapat  $x = 60$  dan  $y = 9 \rightarrow z$  maksimum untuk  $x = 60$  dan  $y = 9$

$$z \text{ maksimum} = -60^2 + 2 \cdot 60 \cdot 9 - 2 \cdot 9^2 + 102 \cdot 60 - 84 \cdot 9 = 2682$$

Jadi produksi pabrik itu maksimum 2682000 m/ bulan jika dioperasikan 600 set mesin dan dipekerjakan 900 karyawan.

4) Produksi rusak/ gagal 5%, jadi yang baik  $0,95 \times 2682000 \text{ m} = 2547900 \text{ m}$ .

Total evenue (TR)  $2547900 \times \text{Rp. } 4.000,00 = \text{Rp. } 10.191.600.000,00$

5) Total cost  $2682000 \times \text{Rp. } 3.500,00 = \underline{\underline{\text{Rp. } 9.387.000.000,00}}$

Net Revenue (laba) maksimum/bulan =  $\text{Rp. } 804.600.000,00$

6)  $x = 80 \rightarrow z = -80^2 + 2.80y - 2y^2 + 102.80 - 84y$  didapat

$z = -6400 + 3040 - 722 + 8160 - 1596 = 2482$ .

Untuk  $x = 60$  dan  $y = 9$  maka  $z = 2682$ . jika mesin 600 set, dan karyawan 900 orang, maka produksi 248200 m/bulan. Produksi turun 200.000 m/bulan  $\rightarrow$  laba berkurang. Jelaslah bahwa fungsi produksi ini penting bagi manajemen pabrik itu.

### SOAL-SOAL.

1. Sebuah perusahaan mengoperasikan  $x$  puluh set mesin, mempekerjakan  $y$  ratus karyawan, memproduksi  $z$  ribu unit/ bulan. Ketiga variable itu mempunyai hubungan :

$$Z = f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey$$

Pada mulanya dioperasikan 100 set mesin, dipekerjakan 100 orang karyawan, memproduksi 953000 unit/bulan, ditulis  $f(10,1) = 953$  selanjutnya berturut-turut  $f(20,3) = 1703$ ;  $f(25,4) = 2015$ ;  $F(30,6) = 2268$  dan  $f(35,8) = 2483$ .

Pertanyannya serupa dengan contoh di atas.

2. Pengantar serupa dengan soal nomor 1 di atas.

$F(10,1) = 1159$ ;  $f(20,3) = 2101$ ;  $f(25,4) = 2509$ ;  $F(30,6) = 2844$  dan  $f(35,8) = 3141$ . Pertanyaan saerupa dengan contoh di atas..