DIKTAT
MATEMATIKA II

(PERKALIAN TIGA VEKTOR ATAU LEBIH)

Drs. A. NABABAN

PURNAWAN, M.T

JURUSAN PENDIDIKAN TEKNIK MESIN

FAKULTAS PENDIDIKAN TEKNOLOGI DAN KEJURUAN

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

2004

PERKALIAN TIGA VEKTOR ATAU LEBIH

5.1. TRIPLE SCALAR PRODUCT

Produk (A x B) . C disebut TRIPLE SCALAR PRODUCT, dan mempunyai makna geometri sebagai berikut :

Vektor N = A x B adalah normal pada bidang yang dibentuk oleh vektor-vektor A dan B, atau normal pada bidang alas (A,B) dari paralelepipedium yang rusuk-rusuknya A, B dan C. Besarnya $N = |N|$ = Bilangan yang menyatakan luas alas paralelepipedium itu, yaitu jajaran genjang yang sisi-sisinya A dan B. Jadi :

$$(AxB).C = N.C = |N||C|\cos\theta$$
$$|N| = |AxB| = \quad luas \quad alas \quad dan,$$
$$|C|\cos\theta = \pm h = \quad tinggi \quad paralelepipecum.$$

Jika C dan A x B memenuhi sistem sekrup kanan, triple scalar product adalah positif, tetapi jika memenuhi sistem skrup kiri, tandanya negatif. Jika berganti – ganti bidang itu dipandang sebagai bidang alas, maka (A x B) . C = (B x C) . A = (C x A) . B. Karena dot product komutatif, maka (B x C). A = A. (B x C). Dengan demikian (AxB).C = A. (B x C). Jadi dot product dan cross product dapat dipertukarkan dalam triple scalar product. Jika diketahui vektor $A = a_1 i + a_2 j + a_3 k$, vektor $B = b_1 i + b_2 j + b_3 k$ dan vektor $C = c_1 i + c_2 j + c_3 k$, maka triple scalar product dari ketiga vektor itu dapat dinyatakan dengan :

$$A.(B \times C) = \begin{matrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \end{matrix} \quad \text{atau} \quad [ABC] = \begin{matrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \end{matrix}$$

Perkalian lain yang lebih sederhana antara tiga vektor adalah : (A . B) . C, yaitu sekalar s = A . B dikalikan dengan C, maka hasilnya adalah vektor sC.

Dari keterangan diatas jelaskan. Bahwa ***TRIPLE SCALAR PRODUCT*** dapat dipakai menghitung ISI sebuah **PARALELEPIPEDIUM**.

Soal-Soal Latihan :

Diketahui vektor-vektor : A = 3i + j + k ;   B = 2i + 3j – k ; C = -i + 2j + 2k dan D = 3i – 4j + 12k.

1 Hitunglah luas segitiga-segitiga ABC, ABD, ACD dan BCD.

2 Hitunglah jarak titik D ke segitiga ABC

3 Hitunglah isi limas D.ABC

4 Tentukanlah titik berat limas D.ABC

5 Tentukan jarak titik P (2, 3, 17) ke bidang ABC.

5.2. TRIPLE VECTOR PRODUCT (*TRIPLE CROSS PRODUCT*)

Triple vector product atau triple cross product (AxB)xC = (A.C)B – (B.C) pada umumnya tidak sama.

$$(A \times B) \times C = (A \cdot C) B - (B \cdot C) A \qquad (*)$$

Baiklah hal ini ditinjau melalui beberapa contoh :

1. Jika salah satu vektor itu vektor nol, maka persamaan itu benar, karena kedua ruas itui adalah nol.
2. Jika tidak ada vektor nol diantaranya, tetapi B = sA (Artinya B // A), dimana s skalar, maka kedua ruas itu sama.
3. Jika tidak ada vektor nol diantaranya, dan A dan B tidak sejajar. Vektor diruas kiri persamaan (*) sejajar dengan bidang yang dibentuk oleh A dan B. Oleh karena itu dapat di cari skalar m dan n, sehingga :

$$(A \times B) \times C = mA + nB \qquad (**)$$

Untuk memperoleh m dan n diambil vektor I dan J yang saling tegak lurus dibidang yang dibentuk A dan B, dimana $I = \frac{A}{|A|}$ ambil vektor K = I x J dan ditulis semua vektor satuan I , J dan K :

$$A = a_1 I$$
$$B = b_1 + b_2 J$$
$$C = c_1 I + c_2 J + c_3 K$$

maka ;

$$\left(AxB\right) = a_1 b_2 K$$

dan ;

$$\left(AxB\right)xC = a_1 b_2 c_1 J - a_1 b_2 c_2 I$$

Jadi ;

$$mA + nB = m\left(a_1 I\right) + n\left(b_1 I + b_2 J\right) = a_1 b_2 c_1 J - a_1 b_2 c_2 I$$

ini adalah ekivalen dengan sepasang persamaan skalar :

$$ma_1 + nb_1 = -a_1 b_2 c_2$$
$$nb_2 = a_1 b_2 c_1$$

Jika $b_2 = 0$, A dan B adalah sejajar, hal mana bertentangan dengan yang diketahui, bahwa B tidak sejajar dengan A. Karena $b_2 = 0$,

Maka ;

$$n = a_1 c_1 = A.C$$

$$ma_1 = -nb_1 - a_1 b_2 c_2$$
$$\Rightarrow -a_1 b_1 c_1 - a_1 b_2 c_2$$

Karena $\left|A\right| = a_1 = 0,$ dapat dibagi oleh a_1.

Maka ;

$$m = -\left(b_1 c_1 + b_2 c_2\right) = -\left(B.C\right)$$

Jika harga m dan n disubtitusikan pada persamaan (**)
diperoleh :

(A x B) x C = (A . C) B – (B . C) A (*)

Kesamaan (B x C) x A = (B . A) C – (C . A) B diperoleh dari (*) dengan penggantian A, B dan C. Jika B x C dan A dipertukarkan tempatnya, maka tanda dari ruas kanan juga harus di pertukarkan, sehingga :

A x (B x C) = (A . C) B – (A . B) C

$= p_1 B - p_2 C$

Jelaslah bahwa umumnya A x (B x C) dan (A x B) x C tidak sama.

5.3. SIFAT – SIFAT

1 $(A \times B) \times C = - C \times (A \times B) = - (C . B) A + (C . A) B$

2 $A \times B . (C \times D) = A . [B \times (C \times D)] = A . [(B . D) C – (B . C) D]$

$$= (A . C) (B . D) – (A . D) (B . C)$$

3 $(A \times B) \times (C \times D) = (A \times B . D) C – (A \times B . C) D$

$$= [ABD]C – [ABC] D = [CDA] B – [CDB] A$$

Contoh 1 :

Hitunglah (A x B) x C jika A = i – j + 2k, B = 2i + j + k dan C = i + 2j – k .

Jawab :

Dari rumus (A x B) x C = (A . C) B – (B . C) A

Didapat ;

(- 3) B – (3) A = - 3A – 3B = - 9 (i + k)

Dengan cara lain ;

$$A \times B = \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} = - 3i + 3j + 3k$$

$$(A \times B) \times C = \begin{array}{ccc} i & j & k \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & - 1 \end{array} = - 9i – 9k$$

Contoh 2 :

Tentukanlah (A x B) x (C x D)

Jawab :

Tulislah C x D = V, maka soal itu menjadi :

(A x B) x V = (A.V) B = mB – nA. Jika A x B = W, maka soal itu menjadi ;

W x (C x D) = (W.D) C – (W.C) D = pC – qD. Jadi vektor itu sejajar dengan perpotongan bidang (A,B) dan bidang (C,D).

Contoh 3 :

A = PQ, B = PS, A’ = P’Q’, B’ = P’S’ adalah sisi-sisi jajaran genjang PQRS dan P’Q’R’S’, sehingga PP’, QQ’, RR’, dan SS’ saling sejajar dan // U vektor satuan. Tunjukanlah bahwa (A x B) . U = (A’ x B’) .U.

Jawab :

A = PQ = PP’ + P’Q’ + Q’Q = P’Q’ + (PP’ – QQ’) = A’ + sU untuk suatu skalar s , karena PP’ dan QQ’ sejajar dengan U dengan cara yang sama B = B’ + tU untuk suatu skalar t oleh karena itu ;

$$A \times B = (A' + sU) \times (B' + tU)$$
$$= A' \times B' + t(A' \times U) + s(U \times B') + st(U \times U). \quad (U \times U = 0)$$

A’ x U dan U x B’ keduanya tegak lurus pada U, terbukti dengan dot product kedua ruas.

Soal-Soal Latihan :

Diketahui tiga vektor A = 3i + j + k ; B = 2i + 3j – 2k dan C = - i + 2j + 12k.;

1 Tentukanlah a) (A x B).C b) (A.B) C

2 Tentukanlah isi paralelepipedium yang rusuk-rusuknya A, B dan C

3 Tentukanlah isi prisma sisi tiga yang rusuk-rusuk alasnya A dan B sedang rusuk tegaknya C.

4 Tentukanlah D sehingga ABCD jajaran genjang

5 Tentukanlah : a) A x (B x C) b) (A x B) x (C x D)

6 Tentukanlah besar sudut yang dibentuk ketiga vektor itu ∟(A,B), ∟(A,C) dan ∟(B,C).

7 Tunjukanlah, bahwa :

a) A . (C x B) = - A (B x C)

b) A . (A x B) = 0

c) (A + D) . (B x C) = A. (B x C) + D. (B x C).

BAB VI

VEKTOR DALAM RUANG BERDIMENSI n atau dalam E^n

6.1 PERNYATAAN VEKTOR

Vektor dalam ruang berdimensi n dinyatakan dengan komponen – komponennya seperti pernyataan vektor dalam ruang berdimensi 2 dan 3 :

$$A = a_1 i + a_2 j + ... + a_n u$$

atau dengan matriks :

$$A = (a_1, a_2, a_3, ... a_n)\begin{pmatrix} i \\ j \\ . \\ . \\ u \end{pmatrix}; B = (b_1, b_2, b_3, ... b_n)\begin{pmatrix} i \\ j \\ . \\ . \\ u \end{pmatrix}$$

Diketahui :

vektor–vektor dalam $E^n; A = (a_1, a_2, a_3, ... a_n) dan. B = (b_1, b_2, b_3, ... b_n), maka$:

1 $A = B \Leftrightarrow a_1 = b_1; a_2 = b_2; a_3 = b_3; ...... a_n = b_n$, atau jika dan hanya jika sama komponen-komponennya yang sepadan.

2 A + B = C, yaitu $a_1 + b_1 = c_1; a_2 + b_2 = c_2$ dan seterusnya demikian juga dengan pengurangan.

3 Perkalian skalaer s dengan vektor A berlaku seperti pada vektor dalam $E^2 dan E^3 : sA = (sa_1, sa_2, sa_3, ... sa_n)$.

4 Inner product dua vektor A dan B edinyatakan dengan A.B yaitu : $A.B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... a_n b_n$

5 Panjang vektor A ditulis IAI , merupakan akar dari A.A jadi : $|A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2}$

6 Vektor nol adalah 0 = (0, 0, 0, ..., 0).

7 Tidak berlakukan vektor product atau cross product dalam ruang berdimensi n.

6.2 SIFAT – SIFAT

Diketahui vektor-vektor A, B dan C dalam ruang En, skalar a, b, c dan d, serta vektor 0, maka :

i) A + 0 = 0 + A = A

ii) A + (- 1) A = 0

iii) A + B = B + A

iv) A + (B + C) = (A + B) + C

v) A.B = B.A

vi) A.(B + C) = A.B + A.C

vii) (c + d) A = cA + dA

viii) a (bC) = (ab) C

ix) IcAI = I c I I A I

x) A $\perp$ B < === > A.B = 0

Arah vektor A (bukan 0) adalah vektor satuan $\frac{A}{|A|}$

Jika B bukan vektor 0, maka vektor A dapat ditulis sebagai jumlah dua vektor $A_1 dan A_2$, dimana A_1 proyeksi A pada B dan A_2 $\perp$ B :

$$A = A_1 + A_2$$
$$A_1 = cB\_dan\_A_2.B = 0$$

seperti untuk n = 2 atau 3 (lihat hal 8) didapat $A_1 = \left(\frac{A.B}{B.B}\right)B$ (*) dan ini adalah cB, karena $c = \frac{A.B}{B.B}$ skalar, jika B $\neq$ 0. jika A_1 dinyatakan seperti pada persamaan (*) dan $A_2 = A - cB$, maka A_2 $\perp$ B, karena

A_2.B = (A – cB).B = A.B – c (B.B)

$$= A.B - \left(\frac{A.B}{B.B}\right) B.B = A.B - A.B = 0$$

6.3 REFLEKSI

Andaikan vektor A akan direfleksikan (dicerminkan) terhadap vektor B. Ambilah vektor A’ = A_1 - A_2. Untuk mana :

$A_1 = \left(\frac{A.B}{B.B}\right)$ B, A_2 = A - A_1

maka :

A' = A_1 - (A - A_1) = 2 A_1 - A

Jadi refleksi vektor A terhadap vektor B (vektor bukan nol) adalah

Vektor A' = 2 $\left(\frac{A.B}{B.B}\right)$ B – A

Contoh 1 :

Diketahui A 9 1, -1, 0, 1) dan B (1, 0, 1, 0)

Tentukanlah :

a. Proyeksi vektor A pada vektor B
b. Refleksi vektor A terhadap vektor B

Jawab :

A.B = 1 + 0 + 0 + 0 = 1

B.B = 1 + 0 + 1 + 0 = 2

Proyeksi A ke B adalah :

$A_1 = \left(\frac{A.B}{B.B}\right)$ B = $\frac{1}{2}B = \left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0\right)$

Komponen A yang tegak lurus pada B adalah :

A_2 = A - A_1 = (1, -1, 0, 1) - $\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0\right) = \left(\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2},1\right)$

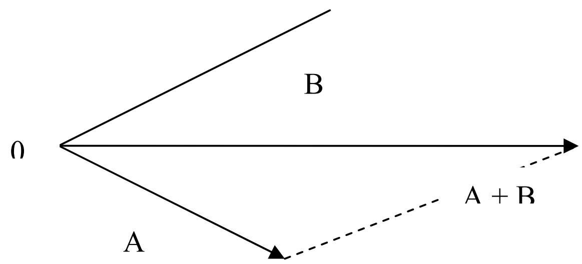
(Cek : $A_1 + A_2 = \left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0\right) + \left(\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2},1\right)$ = (1, -1, 0, 1) = 2 a_2)

Theorama Pythagoras : $|A+B|^2 = |A|^2 + |B|^2 \_Jika\_A.B = 0.$ ini mudah karena :

$$|A+B|^2 = (A+B).(A+B)$$
$$\Rightarrow A.(A+B) + B.(A+B)$$
$$\Rightarrow A.A + A.B + B.A + B.B$$
$$\Rightarrow |A|^2 + 0 + 0 + |B|^2 \_Jika\_A.B = 0$$

Theorama Pythagoras berlaku juga dalam ruang E^n .

Pertidaksamaan segitiga, bahwa $|A+B| < |A| + |B|$ mudah ditunjukan dengan menggambar vektor A, B dan (A + B) , (lihat gambar 13)



gambar 13

Kedua ruas itu sama jika satu vektor itu vektor nol, atau kedua vektor itu mempunyai arah yang sama (sejajar), jika $\frac{A}{|A|} = \frac{B}{|B|}$

Soal-Soal Latihan :

Diketahui $A = (a_1, a_2, a_3, a_4); B = (b_1, b_2, b_3, b_4); C = (c_1, c_2, c_3, c_4)$

Buktikanlah :

1. Bahwa A. (B + C) = A.B + A.B
2. Bahwa A.B = B.A
3. Bahwa $|A+B|^2 = |A|^2 + 2A.B + |B|^2$
4. Diketahui Vektor A = (- 1, 1, 0, 2) ; B = (1, 1, 0, 1) dan C = (0, 0, 1, 1).

   Tentukanlah :

   a. $|A|$
   b. $|B|$
   c. A.B
   d. Sudut (A.B)
   e. Proyeksi A pada B
   f. Proyeksi A pada C
   g. Proyeksi B pada C
   h. Proyeksi (A + B) pada C
   i. Refleksi A terhadap B.
5. Diketahui vektor-vektor A = (1, 0, 1, 0) ; B = (1,0,-1,0) ; C = (0, 2, 0, 3) ; dan D (0, 3, 0, -2).
   Buktikan bahwa keempat vektor itu saling tegak lurus.

6.4 BERGANTUNG LINIER DAN BEBAS LINIER

Ambil $V_1, V_2, V_3, ..., V_n$ dalam ruang berdimensi n (E^n), dan skalar $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$, maka : $c_1V_1, c_2V_2, c_3V_3, ..., c_nV_n$ disebut kombinasi linier dari vektor-vektor $V_1, V_2, V_3, ..., V_n$.

Definisi :

Sejumlah vektor $V_1, V_2, V_3, ..., V_n$ disebut bergantung linier jika dan hanya jika ada skalar $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$, yang tidak sama dengan nol, sehingga : $c_1V_1, c_2V_2, c_3V_3, ..., c_nV_n = 0$.

Contoh 2 :

$V_1 = 2i + j - k; V_2 = i - 2j + 3k; dan\_V_3 = 3i + 4j - 5k$

Periksalah apakah ketiga vektor itu bergantung linier ?

Jawab :

$c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 = 0.$

Atau ;

$$c_1(2i + j - k) + c_2(i - 2j + 3k) + c_3(3i + 4j - 5k) = 0$$
$$sehingga\ :$$
$$\Rightarrow 2c_1 + c_2 + 3c_3 = 0$$
$$\Rightarrow c_1 - 2c_2 + 4c_3 = 0$$
$$\Rightarrow -c_1 + 3c_2 - 5c_3 = 0$$

Sistem persamaan ini mempunyai determinan utama I D I = 0 jika sistem itu diselesaikan didapatlah (jawaban nontrivial) : c_1 = - 2 c_3 dan c_2 = c_3 ; c_3 skalar riil bukan 0. jadi ketiga vektor itu bergantung linier.

Catatan :

Salah satu vektor itu adalah kombinasi linier dari kedua vektor lain (bergantung linier).

Teorema :

Jika S himpunan vektor-vektor $V_1, V_2, V_3, ..., V_n$ yang berdiri atas himpunan bagian (tak kosong) : $T = (V'_1, V'_2, V'_3, ..., V'_n)$ vektor – vektor bergantung linier, maka S bergantung linier.

Contoh 3 :

Diketahui $A = 2i + 3j - k; B = i - 2j + k; dan\_C = 2i + j + 2k$. Periksalah apakah ketiga vektor itu bergantung linier ?

Jawab :

$$c_1A + c_2B + c_3C = 0$$
$$atau\_;$$
$$c_1(2i + 3j - k) + c_2(i - 2j + k) + c_3(2i + j + 2k) = 0$$
$$sehingga$$
$$\Rightarrow 2c_1 + c_2 + 2c_3 = 0$$
$$\Rightarrow 3c_1 - 2c_2 + c_3 = 0$$
$$\Rightarrow -c_1 + c_2 - 2c_3 = 0$$

Determinan utama dari sistem persamaan linier itu I D I = 0 jadi persamaan ini mempunyai jawaban tivial, jadi $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Jadi ketiga vektor itu bebas linier.

Contoh 4 :

Diketahui $V_1 = (1, 0, 1, 0); V_2 = (1,0,-1,0); V_3 = (0, 2, 0, 3);$ dan $V_4 = (0, 3, 0, -2)$

a. Periksalah apakah vektor – vektor itu bebas linier
b. Hitung sudut yang dibentuk tiap pasang vektor itu

Jawab :

Jelas keempat vektor itu bukan vektor nol .

a. $c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 + c_4V_4 = 0$

atau ;

$$c_1(1, 0, 1, 0) + c_2(1,0,-1,0) + c_3(0, 2, 0, 3) + c_4(0, 3, 0, -2) = 0$$
$$c_1 + c_2 = 0\_dan\_2c_3 + 3c_4 = 0$$
$$c_1 - c_2 = 0\_dan\_3c_3 - 2c_4 = 0$$

kedua pasangan ini menghasilkan :

$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$.

Jadi keempat vektor itu bebas linier.

b. Keempat vektor saling tegak lurus :

$V_1.V_2 = 0 \rightarrow V_1$ *Tegak lurus pada* V_2
$V_1.V_3 = 0 \rightarrow V_1$ *Tegak lurus pada* V_3
$V_1.V_4 = 0 \rightarrow V_1$ *Tegak lurus pada* V_4
$V_2.V_3 = 0 \rightarrow V_2$ *Tegak lurus pada* V_3
$V_2.V_4 = 0 \rightarrow V_2$ *Tegak lurus pada* V_4
$V_3.V_4 = 0 \rightarrow V_3$ *Tegak lurus pada* V_4

Soal-soal latihan :

1. Diketahui vektor A = (1, 2, -1, 0) dan B = (2, -1, 0, 1)

   Tentukanlah vektor-vektor V = (x, y, z, u) dalam E^n yang tegak lurus pada kedua vektor itu.

2. Periksalah, apakah vektor-vektor dibawah ini bergantung linier atau bebas linier :
   a. A = (1, -2, 1, 1) ; B = (2, 1, 0, 1) ; C = (1, 0, 1, 0)
   b. A = (-2, 1, 0, 1) ; B = (1, 2, 1, 0) ; C = (0, 5, 2, 1)
   c. A = (1, 3, -2) ; B = (2, 0, 1) ; C = (0, 6, -5)
   d. A = (1, 3, -2) ; B = (2, 0, 1) ; C = (1, 5, 3)

7. FUNGSI VEKTOR

7.1 VEKTOR POSISI

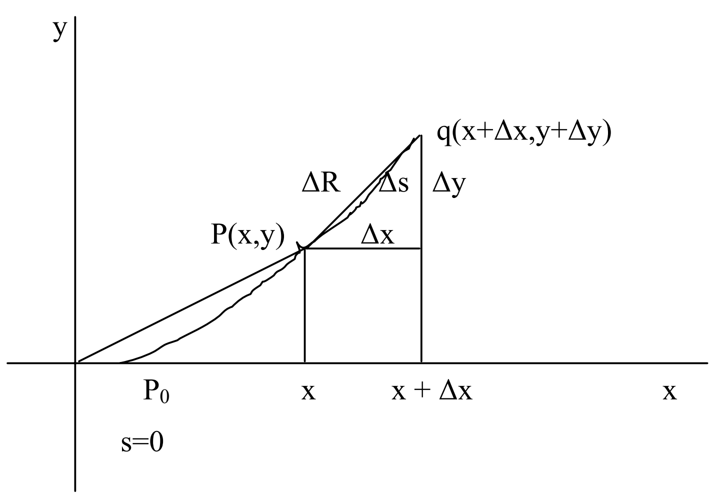
andaikan titik P bergerak sepanjang sebuah kurva di bidang XOY, dan misalkan diketahui posisi titik itu pada waktu t, berarti bahwa gerakan titik P dinyatakan oleh sepasang fungsi f(t) dan g (t) : x = f (t) dan y = g (t)

vector yang ditarik dari titik pangkal O ke titik P disebut vector posisi R. Vektor ini adalah fungsi t:

R = xi + yj (1) atau R = if (t) + jg (t) (2)

7.2 VEKTOR TANGENT

Jika suatu partikel bergerak sepanjang kurva yang diketahui di bidang XOY, dapat ditentukan posisi partikel dengan menghitung sepanjang busur s dari titik Po yang ditentukan pada kurva itu.



Vektor R = ix + jy dari titik pangkal o ke titik P (x,y) adalah fungsi s, dan hendak diselidiki sifat $\frac{dR}{ds}$. Ambil P (x,y) berkorespodensi dengan harga s, sedang Q (x + s, y + y) berkorespodensi dengan s + s, maka $\frac{\Delta R}{\Delta s} = i\frac{\Delta x}{\Delta s} + j\frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\Delta s}$

(1)

Satu vector yang panjangnya sama dengan tali busur PQ dibagi oleh busur PQ, yang mendekati satu satuan bila s →0. Oleh karena itu

$$\frac{dR}{ds} = \lim_{s\to 0}\frac{\Delta R}{\Delta s} \qquad (2)$$

adalah satu vector satuan. Arah vektor satuan ini adalah limit arah $\frac{\Delta R}{\Delta s}$ bila s→0. Jadi

$\frac{\Delta R}{\Delta s} = \frac{PQ}{s}$:

(a) mempunyai arah yang sama dengan PQ jika s>0
(b) mempunyai arah yang sama dengan QP jika s<0

Arah $\frac{dR}{ds}$ sepanjang tangent pada kurva di P, dan sejalan dengan pertambahan panjang busur s. Karena itu $\frac{dR}{ds}$ = T satu vector satuan di P. Jika s → 0,

maka $\frac{dR}{ds} = \mathrm{i}\,\frac{dx}{ds} + \mathrm{j}\,\frac{dy}{ds}$ (3)

dan ini dapat dipakai mencari T di suatu titik pada kurva yang diketahui.

Cara yang sama dapat dipakai mencari tangent pada kurva di E^3. Jika P (x,y,z) pada kurva, maka vektor dari O ke P merupakan fungsi s, dan turunannya adalah :

$$\frac{dR}{ds} = \mathrm{i}\,\frac{dx}{ds} + \mathrm{j}\,\frac{dy}{ds} + \mathrm{k}\,\frac{dz}{ds} \qquad (4)$$

Vektor T yang didefinisikan dengan $\frac{dR}{ds} = T$ (5)

Adalah vector satuan tangent pada kurva ruang yang dilukiskan oleh titik ujung P dari vector R = OP.

Dari (4) dan (5) didapat : T = i $\frac{dx}{ds} + j\frac{dy}{ds} + k\ \frac{dz}{ds}$ (6)

Dan karena T.T = 1, maka ds = ± $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$

$$= \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Contoh : diketahui x = a cos mt ; y = asin mt dan z = bt

Tentukanlah vector tangent di t = 0

Jawab : T = $\frac{dR}{ds} = i\ \frac{dx}{ds} + j\frac{dy}{ds} + k\ \frac{dz}{ds}$

$$= i\left(\frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds}\right) + j\left(\frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds}\right) + k\left(\frac{dz}{dt}\frac{dt}{ds}\right)$$

$$= i\left(-am\sin mt\frac{dt}{ds}\right) + j\left(am\cos mt\frac{dt}{ds}\right) + k\left(b\frac{dt}{ds}\right)$$

T vector satuan, jadi $|T| = 1$, karena itu T.T = 1, yang berarti :

$$\left[(-am\sin mt)^2 + (am\cos mt)^2 + b^2\right]\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 1 \text{ atau}$$

$$\left(a^2m^2 + b^2\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 1 \rightarrow \frac{dt}{ds} = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}$$

karena $\frac{dt}{ds}$ suatu konstanta, maka boleh diambil yang positif, sehingga s fungsi naik dalam t.

Jadi :

T = $\frac{am(-i\sin mt + j\cos mt) + bk}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}$ dan untuk t = 0

T = $\frac{amj + bk}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}$

SOLA-SOAL:

R adalah vector di E^2 atau E^3 dari titik pangkal O ke titik P. Carilah vector satuan tangent

$\frac{dR}{ds} = T$ dari :

1. R = 2i cos t + 2j sin t
2. R = e^ti + t^2j
3. x = 6 sin 2t, y = 6 cos 2t, z = 5t
4. x = e^t cos t, y = e^t sin t, z = e^t

5.x = 3 cosh 2t, y = 3 sinh 2t, z = 6t

.3. VEKTOR KECEPATAN (VELOCITY VECTOR)

Dalam bagian ini dibicarakan vector dalam E^n , terutama dalam E^2 dan E^3. Secara matematika didefinisikan turunan pertama dari :

$$R = ix + jy \quad (1) \quad \text{menurut } t: \quad \frac{dr}{dt} = i\frac{dx}{dt} \quad j\frac{dy}{dt} \qquad (3)$$

Yang didapat jika kedua ruas (1) didifferensialkan menurut t , dengan I dan j sebagai konstanta. Arti dari geometri dari (3) adalah arah dan besarnya vector :

$$\text{Slope} = (\text{ kecondongan }) \quad \frac{dR}{dt} = \frac{\text{rise}}{\text{run}} \quad \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx}$$

$$\text{magnitude} = (\text{panjang }) \quad \frac{dR}{dt} = dR \quad i\frac{dx}{dt} \quad j\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

Disini s adalah panjang busur sepanjang kurva diukur darititik awal (x_o, y_o).

Jika digambar vector $\frac{dR}{dt}$, dengan titik awal di p, maka vector hasil adalah :

a). Tangent pada kurva di p, sama dengan slope kurva di p, yaitu $\frac{dy}{dt}$

b). Besar (panjang)-nya = $\frac{ds}{dt}$,

yang menyatakan kecepatan partikel di p.

Jadi menurut fisika , vector $\frac{dR}{dt}$,jika digambar dari p. menyatakan velocity vector kecepatan , yang mempunyai sifat – sifat (a) dan (b) di atas.

Jadi vector posisi R = ix + ij didiferensialkan menurut waktu t, hasilnya adalah velocity vector :

$$v = \frac{dr}{dt} = i\frac{dx}{dt} \quad j\frac{dy}{dt}$$ (lihat gambar 15).

7.4 AKSELERASI

Vektor akselerasi a diperoleh dari **v** dengan mendifferensialkan **v** :

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} = \mathbf{i}\frac{d^a x}{dt^2} + \mathbf{j}\frac{d^2 y}{dt^2}$$

Suatu partikel dengan massa **m** (konstan) bergerak dengan gaya **F**, sehingga **F=ma** (rumus Newton II).

Contoh : ** Partikel **P(x,y) bergerak pada hiperbola :

x = r cosh pt ; **y = r sinh pt** dimana **r** dan **p** konstanta positif. tentukanlah **v** (velocity vector) dan **a** (acceleration vector).

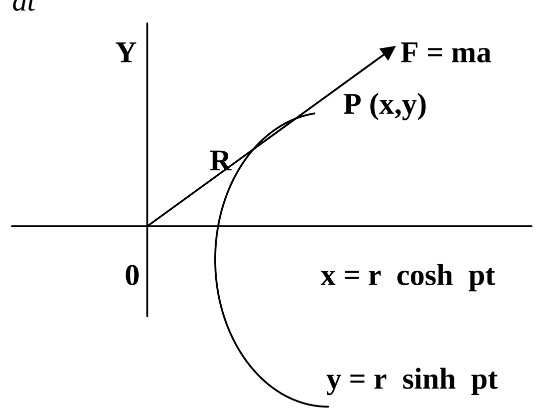
Jawab : R = ix + jy = i (pr sinh pt) + j(r sinh pt)

$$\mathbf{v} = \frac{dR}{dt} = \mathbf{i}\frac{dx}{dt} = \mathbf{j}\frac{dy}{dt} = \mathbf{I\ (pr\ sinh\ pt) + j(pr\ cosh\ pt)}$$

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2R}{dt^2} = \mathbf{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \mathbf{j}\frac{d^2y}{dt^2} = \mathbf{i\ (p^2r\ cosh\ pt) + j\ (p^2r\ sinh\ pt)}$$

$$= \mathbf{p^2R}$$

Ini berarti bahwa gaya **F = ma = mp²R,** panjangnya adalah $\mathbf{mp^2}\ |R| = \mathbf{mp^2}\ |OP|$, yang proporsional terhadap jarak **OP**, dan arahnya sama dengan arah **R**.



Gambar 16

Contoh : Suatu gaya yang bekerja pada partikel **P** diberi sebagai fungsi : **F = i cosh t + j sin t**

Jika partikel itu mulai bergerak dari titik (c,0) dengan kecepatan pertama $\mathbf{v_0 j}$ tegak lurus pada sb-x, carilah kurva lintasannya.

Jawab : Jika Vektor posisi **R = ix + jy,** maka soal itu dapat berbunyi : Carilah **R** jika **F =**

$$\mathbf{m}\frac{d^2R}{dt^2} = \mathbf{i\ \cosh t + j \sin t\ (*)} \text{ dan jika } \mathbf{t = o,\ R = ic,}\ \frac{dR}{dt} = \mathbf{v_0 j.}$$

Jika $\mathbf{v} = \frac{dR}{dt}$, menurut **(*)** , **m dv = (i cos t + j sin t) dt**. Jika diintegralkan diperoleh:

$$\mathbf{m\,v = m}\ \frac{dR}{dt} = \mathbf{I \sin t - j \cos t + C_1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (**)$$

dimana konstanta integrasi adalah vektor $\mathbf{C_1}$. Harga $\mathbf{C_1}$ dapat diperoleh dengan menggunakan kecepatan awal yang tegak lurus, yaitu $\mathbf{v_0}$j pada **t=0** :

$$\mathbf{mv_o j = -\ j + C_1}$$

$$\mathbf{C_1 = mv_0 j + j = (mv_0 + 1)\ j}$$

Substutusi pada **(**)** didapat :

$$\mathbf{m}\frac{dR}{dt} = \mathbf{i\ \sin\ t + j\,(mv_0 + 1 - \cos t)}$$

Dengan mengintegralkan lagi, didapat :

$$\mathbf{mR = -\,i\ \cos\ t + j\,(mv_0 t + t - \sin\ t) + C_2}$$

Kondisi awal **R = ic…….(*)** dapat dipakai menentukan $\mathbf{C_2}$:

$\mathbf{mci = -\,i + C_2 \rightarrow C_2 = (mc + 1)}$. Dengan demikian vektor posisi **R** adalah :

$$\mathbf{R} = \frac{1}{m}\ \mathbf{[\ i\,(mc + 1 - \cos\ t) + j(mv_0 t - \sin\ t)\ ]}$$

Persamaan parameter kurva didapat melalui persamaan komponen-komponen **R** dengan **R = ix + jy** , yaitu :

$$\mathbf{x = c} + \frac{1-\cos t}{m} \quad ; \quad \mathbf{y = v_0 t} + \frac{t - \sin t}{m}$$

Dalam ruang berdimensi tiga $(\mathbf{E^3})$, vektor ditulis :

$$\mathbf{R = ix + jy + kz}$$

Dimana **x, y** dan **z** fungsi **t** yang didapat dua kali didifferensialkan, maka velocity dari **P (x, y, z)** adalah :

$$\mathbf{V} = \frac{dR}{dt} = \mathbf{i}\frac{dx}{dt} + \mathbf{j}\frac{dy}{dt} + \mathbf{k}\frac{dz}{dt} \qquad \text{dan}$$

Akselerasi : $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2R}{dt^2} = i\frac{d^2x}{dt^2} + j\frac{d^2y}{dt^2} + k\frac{d^2z}{dt^2}$

7.5 RUMUS-RUMUS TURUNAN

Jika $U = iU_1(t) + jU_2(t) + kU_3(t)$; $V = iV_1(t) + jU_2(t) + kU_3(t)$;

$W = iW_1(t) + jW_2(t) + kW_3(t)$ dan $R = ix(t) + jy(t) + kz(t)$

1) $dU = idU_1(t) + jdU_2(t) + kdU_3(t)$

2) $dR = idx(t) + jdy(t) + kdz(t)$

3) $\frac{d(U+V)}{dt} = \frac{dU}{dt} + \frac{dV}{dt}$

4) $\frac{d(gV)}{dt} = \frac{dg}{dt}V + g\frac{dV}{dt}$

5) $\frac{d(U.V)}{dt} = \frac{dU}{dt}.V + U.\frac{dV}{dt}$

6) $\frac{d(UxV)}{dt} = \frac{dU}{dt} \times V + U \times \frac{dV}{dt}$

7) $\frac{d[UVW]}{dt} = \left(\frac{dU}{dt}VW\right) + \left(U\frac{dV}{dt}W\right) + \left(UV\frac{dW}{dt}\right)$

$= \frac{dU}{dt}.V \times W + U.\frac{dV}{dt} \times W + U.V \times \frac{dW}{dt}$

7) $\frac{d[Ux(VxW)]}{dt} = \frac{dU}{dt} \times (V \times W) + U \times (\frac{dV}{dt} \times W) + U \times (V \times \frac{dW}{dt})$

(*) $[UVW] = U.V \times W = \begin{pmatrix} U1 & U2 & U3 \\ V1 & V2 & V3 \\ W1 & W2 & W3 \end{pmatrix}$

Contoh : Diketahui $x = t^3$; $y = 5t^2$ dan $z = 10t$. Carilah titik-titik dimana tangent tegak lurus pada tangent di titik $t = 1$.

Jawab : Kurva yan diberikan ekvalen dengan funsi vector $V(T) = t^3i + 5t^2j + 10tk$

Tangent ke kurva di titik $t = 1$, adala $(\frac{dV}{dt})t = 1 = (3t^2i + 10tj + 10k)t=1$

$= 3i + 10j + 10k$

Misalkan tangent tag diminta di $t = t_o$, maka tangent itu adalah : $T = 3t_o^2 i + 10t_o j + 10k$, yang tegak lurus pada tangent di $t = 1$. Jadi dot product kedua vector itu adalah : $(3i + 10j + 10k).(3t_o^2 i + 10t_o j + 10k)$

$$= 3(3t_o^2) + 10(10t_o) + 10(10)$$

$$= 9t_o^2 + 100t_o + 100 = 0 \longrightarrow t_{o1} = 10 ; \quad t_{o2} = -\frac{10}{9}$$

Titik yang diminta dinyatakan dalam koordinat x, y dan z adalah (-1000, 500, -100) dan $\left(-\frac{1000}{729}, \frac{100}{81}, -\frac{100}{9}\right)$ yang keduanya ternyata tegak lurus pada tangent di titik $t = 1$.

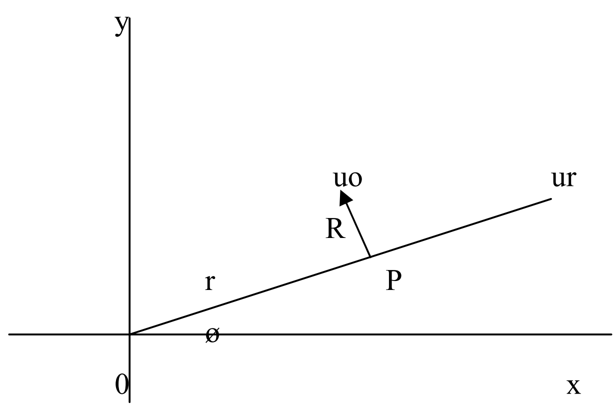
Soal :

R = ix + jy + kz adalah vector dari titik pangkal 0 ke titik P(x, y, z). Tentikanlah velocity vector, acceleration vector, dan sudut antara kedua vector itu pada $t = 0$, jika diketahui :

1. $x = e^t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t \cos t$
2. $x = \text{tg } t$, $y = \sinh 2t$, $z = \text{sech } 3t$
3. $x = \ln(t^2 + 1)$, $y = \text{arc tg } t$, $z = \sqrt{t^2} + 1$
4. $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$
5. $x = 15t$, $y = 5t^3$, $z = 15t + 3t^5$

7.6 KOORDINAT POLAR

Jika partikel P bergerak pada kurva bidang datar dinyatakan dengan koordinat polar, maka perlu diperkenalkan vector satuan : $u_r = I \cos 0 + j \sin 0$, $u_o = -I \sin ø + j \cos ø$ yang titik-titiknya berturut-turut di vector OP dan di garis tegak lurus pada OP dalam arah naik 0 (gambar 17).



Dari (1) didapat :

$$\frac{du_r}{d\theta} = -1 \sin ø + j \cos ø = u_ø$$

$$\frac{du_\theta}{d\theta} = -1 \cos ø + j \sin ø = -u_r$$

Ini berarti bahwa differensial vector satuan u_r dan u_o menurut O berturut-turut menjadi vector yang didapat dengan rotasi 90^o dalam arah positif (berlawanan dengan arah jarum jam). Karena vector R = OP dan rur mempunyai arah yang sama, dan panjang R adalah harga mutlak r dari koordinat polar P(r, ø), maka R = ru_r (3)

Untuk mendapatkan velocity (3) harus didifferensialkan menurut t, dengan mengingat bahwa r dan ru_r variable.

$$\frac{du_r}{dt} = \frac{du_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = u_o \frac{do}{dt}$$

$$\frac{du_\theta}{dt} = \frac{du_\theta}{do} \frac{d\theta}{dt} = -u_r \frac{do}{dt} \qquad (4)$$

Karena $v = \frac{dR}{dt} = u_r \frac{dr}{dt} + r \frac{du_r}{dt}$

Maka $v = u_r \frac{dr}{dt} + u_o r \frac{d\theta}{dt}$ (5)

Tentu akselerasi didapat dengan mendifinisikan v :

$$a = \frac{dv}{dt} = (ur \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{dr}{dt} \frac{du_r}{dt}) + (u_o r \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \frac{du_\theta}{dt} r \frac{do}{dt} \text{ atau}$$

$$a = ur [\frac{d^2 r}{dt^2} - r (\frac{d\theta}{dt})^2] + uo[r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt}] \qquad (6)$$

Persamaan (5) dan (6) dipakai untuk gerakan di bidang XOY dan dengan modifikasi didapat untuk ruang E^3. Pertama tambahkan kz di ruas kanan (3) : R = ru_r + kz (7a)

Kedua tambahkan $k \frac{dz}{dt}$ pada ruas kanan (5) :

$$v = u_r \frac{dr}{dt} + u_o r \frac{d\theta}{dt} + k \frac{dz}{dt} \qquad (7b)$$

Ketiga, tambahkan $k\frac{d^2z}{dt^2}$ ke ruas kanan (6)

$$a = ur\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + uo\left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right] + k\frac{d^2z}{dt^2} \qquad (7c)$$

Persamaan (7a, 7b dan 7c) dipakai dalam koordinat silinder. Ketiga vector u_r, $u_ø$ dan k adalah vector satuan yang saling tegak lurus, yang menurut system sekerup kanan u_r x $u_ø$ = k ; k x u_r = $u_ø$ dan $u_ø$ x k = u_r