

DIKTAT MATEMATIKA II

(PERSAMAAN GARIS DAN PERSAMAAN BIDANG DATAR)



**Drs. A. NABABAN
PURNAWAN, M.T**

**JURUSAN PENDIDIKAN TEKNIK MESIN
FAKULTAS PENDIDIKAN TEKNOLOGI DAN KEJURUAN
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA**

2004

PERSAMAAN GARIS DAN PERSAMAAN BIDANG DATAR

4.2. PERSAMAAN BIDANG DATAR

Untuk menentukan persamaan bidang melalui satu titik $P_1(x_1, y_1, z_1)$, dapat dengan mudah dilakukan, jika diberikan persyaratan bahwa bidang itu tegak lurus pada suatu vektor yang diketahui. Vektor yang diketahui itu merupakan normal pada bidang yang dicari itu.

Diminta menentukan bidang melalui $P_1(x_1, y_1, z_1)$ tegak lurus pada vektor $v = ai + bj + ck$, vektor V dipandang sebagai vektor normal N pada bidang yang diminta. Jika $P_1(x, y, z)$ sembarang titik pada bidang itu, maka vektor :

$$\vec{P_1P} = (x - x_1)\mathbf{i} + (y - y_1)\mathbf{j} + (z - z_1)\mathbf{k}$$

karena tiap $\vec{P_1P} \perp v$, maka selalu $v \cdot \vec{P_1P} = 0$. oleh karena itu persamaan bidang yang diminta adalah :

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 \quad \text{atau}$$

$$ax + by + cz - (ax_1 + by_1 + cz_1) = 0 \quad \text{atau}$$

$$ax + by + cz = p \quad \text{dimana} \quad p = ax_1 + by_1 + cz_1$$

Contoh 1 :

- Hitung jarak titik $P(2, -3, 4)$ ke bidang : $H = x + 2y + 2z = 13$

Jawab :

- Ada dua cara menyelesaikan soal ini :

1) Vektor $N = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ normal pada bidang itu, jadi garis $g = \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{2}$

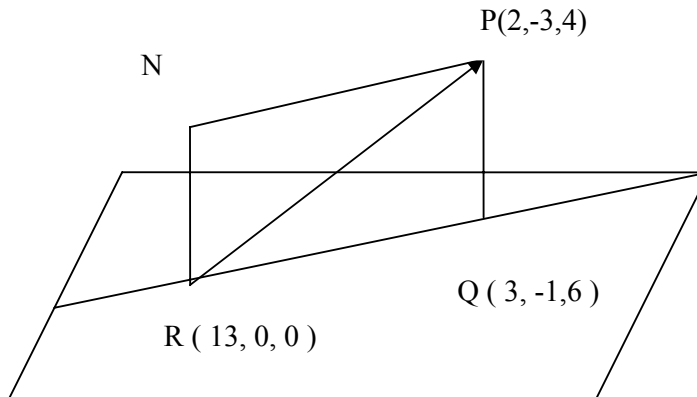
melalui $P(2, -3, 4)$ sejajar dengan normal (N). Dari sini (g) dipandang sebagai

normal pada bidang itu, sehingga (g) dapat ditulis : $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{2} = t$ jadi x

$= t + 2$; $y = 2t - 3$ dan $z = 2t + 4$ merupakan persamaan parameter garis itu dalam t .

Substitusikan dalam persamaan bidang di dapat :

$$(t + 2) + 2(2t - 3) + 2(2t + 4) = 13 \rightarrow t = 1$$



menyatakan titik tembus garis pada bidang itu, yaitu titik $Q(3, -1, 6)$. Jadi jarak titik $P(2, -3, 4)$ dari bidang H itu adalah panjang garis PQ yaitu :

$$|PQ| = d = \sqrt{(3-2)^2 + (-1+3)^2 + (6-4)^2} = 3$$

- 2) Misalnya R suatu titik di bidang H . Proyeksikan PR ke garis normal $N = i + 2j + 2k$. R dapat dipilih, misalnya titik potong bidang H dengan sumbu X , yaitu titik $R(13, 0, 0)$. Ambil N_1 sejajar N melalui R . N_1 membentuk sudut $\theta < 90^\circ$ dengan BP . Jika $RP = (2 - 13)i - 3j + 4k$, maka dapat diperoleh jarak P dari H yaitu :

$$d = |RP| \cos \theta = \frac{|N_1| |RP| \cos \theta}{|N_1|} = \frac{N_1 \cdot RP}{|N_1|}$$

Ambil : $N_1 = \pm N$ (tanda yang dipakai ditentukan kemudian)

$$N_1 \cdot RP = \pm (-11 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2) = \pm (-9)$$

$$|N_1| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

jadi ;

$$d = \frac{+(-9)}{3}. \text{ Untuk itu ambil } N_1 = -N, \text{ maka } d = 3$$

Contoh 2 :

- Hitung sudut antara bidang $2x + y - 2z = 5$ dengan bidang $3x - 6y - 2z = 7$

Jawab :

Jelas bahwa sudut antara dua bidang sama dengan sudut yang dibentuk normal-normal kedua bidang itu, yaitu 0 atau $180^\circ - 0$. dari persamaan bidang-bidang itu didapat normal-normalnya, yaitu :

$$N_1 = 2i + j + 2k \quad \text{dan} \quad N_2 = 3i - 6j - 2k$$

maka :

$$\cos \theta = \frac{N_1 \cdot N_2}{|N_1| |N_2|} = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot (-6) + 2 \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2}} = \frac{4}{21}$$

jadi :

$$\theta = \arccos \frac{4}{21} \Rightarrow 79.8^\circ$$

Contoh 3 :

- Carilah vektor yang sejajar dengan perpotongan bidang $2x + y - 2z = 5$ dan bidang $3x - 6x - 2z = 7$.

Jawab :

Perpotongan kedua bidang itu tegak lurus pada normal – normalnya :

$$N_1 = 2i + j + 2k \quad \text{dan} \quad N_2 = 3i - 6j - 15k$$

jadi vektor yang diminta adalah hasil kali cross product kedua normal itu, yaitu :

$$v = N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -6 & -2 \end{vmatrix} = -14i - 2j - 15k$$

Jadi vektor yang sejajar dengan garis potong kedua bidang itu adalah $V = -14i - 2j - 15k$

Contoh 4 :

- Carilah persamaan bidang melalui $P_1(1, 0, -1)$ dan $P_2(-1, 2, 1)$ dan sejajar dengan perpotongan bidang-bidang $3x + y - 2z = 0$ dan $4x - y + 3z = 0$.

Jawab :

Problem utama adalah mencari sebuah vektor $N = P_1P_2 \times V$, normal pada bidang yang diminta. Perpotongan bidang yang diberikan sejajar dengan vektor :

$$v = N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = i - 17j - 7k$$

dimana N_1 dan N_2 normal-normal kedua bidang yang diketahui. Vektor $P_1 P_2 = -2i + 2j + 2k$ terletak pada bidang yang dicari. Vektor V dapat di geser sejajar dengan dirinya (translasi) sehingga terletak pada bidang yang diminta.

Oleh karena itu ambilah $N = P_1 P_2 \times V$, yaitu :

$$N = P_1 P_2 \times V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -17 & 7 \end{vmatrix} = 20i - 12j - 32k$$

sebagai vektor normal pada bidang itu $N = 20i - 12j + 32k$ atau dikecilkan $\bar{N} = 5i - 3j + 8k$, sehingga bilangan arah bidang itu (5, - 3, 8). Jadi bidang yang diminta melalui titik (1, 0, - 1) adalah $5(x - 1) - 3(y - 0) + 8(z + 1) = 0$ atau $5x - 3y + 8z + 3 = 0$.

Soal – Soal Latihan :

- Jarak $P (x, y, z)$ ke titik pangkal 0 adalah d_1 , dan jarak P ke titik $A (0, 0, 3)$ adalah d_2 , tentukanlah tempat kedudukan P , jika ;
 a) $d_1 = 2 d_2$ dan
 b) $|d_1 - d_2| = 2$
- Carilah vektor proyeksi dari $B = 2i + 3j + 4k$ pada vektor $A = 10i + 11j - 2k$.
- Carilah titik $A (a, a, 0)$ pada garis $y = x$ dibidang XOY, sehingga vektor AB tegak lurus pada garis OA, dimana O titik pangkal dan $B (2, 4, -3)$.
- Diketahui garis $g = \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ carilah titik tembus garis g dengan bidang $3x + 2y - z = 5$.
- Carilah persamaan parameter dan persamaan garis yang menghubungkan $A (1, 2, -1)$ dan $B (-1, 0, 1)$.
- Tunjukkanlah memakai vektor, bahwa jarak titik $P(x_1, y_1, z_1)$ pada bidang $ax + by + cz + d = 0$ adalah :

$$|j| = \left| \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

- Tentukanlah bidang melalui $P (1, -1, 3)$ sejajar dengan bidang $3x + y + z = 7$.

8. Tentukanlah bidang melalui $P (1, 1, -1)$, $Q (2, 0, 2)$ dan $R (0, - 2, 1)$.
9. Tentukanlah luas SegiTiga PQR tersebut pada soal No.8.
10. Tentukan jarak titik $S (3, 2, 13)$ terhadap bidang tersebut pada soal No.8 diatas.