DIKTAT
MATEMATIKA II

(VEKTOR)

Drs. A. NABABAN

PURNAWAN, M.T

JURUSAN PENDIDIKAN TEKNIK MESIN

FAKULTAS PENDIDIKAN TEKNOLOGI DAN KEJURUAN

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

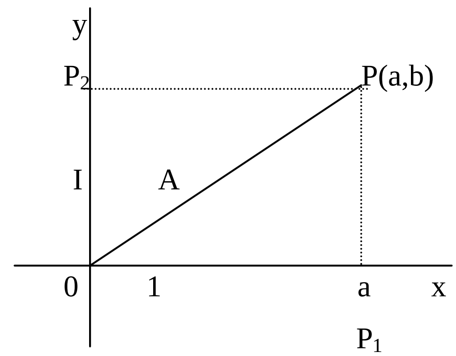
2004

VEKTOR

I. PENDAHULUAN

1.1. PENGERTIAN

Sepotong garis berarah disebut vektor. Vektor dari (0,0) ke (1,0) adalah vektor satuan i, sedang dari (0,0) ke (0,1) adalah vektor satuan j. Jika a skalar, maka ai menyatakan vektor yang sejajar dengan sumbu x (sb-x), panjangnya $|a|$ menuju ke kanan jika a>0 dan menuju ke kiri jika a<0. Demikian juga bj, adalah vektor yang sejajar dengan sumbu y (sb-y) menuju ke atas jika b>0, dan menuju ke bawah jika b<0.



Gambar 1

1.2. PERNYATAAN VEKTOR

Sebuah vektor A ditulis A = ai + bj, yaitu vektor yang titik asalnya di 0 dan titik ujungnya (terminusnya) di titik (a,b) (lihat gambar 1).Vektor yang titik pangkalnya di 0 dinamai VEKTOR POSISI, yaitu vektor yang mewakili semua vektor yang sama panjangnya, sejajar dan searah dengan dia. Dengan demikian sebuah vektor dapat dipindahkan sejajar dengan dirinya sendiri.

Perhatikan vector A = 0P.$0P_1$ = a dan $0P_2$ = b disebut komponen-komponen vektor A. Sebuah vektor ditulis dengan huruf besar, sedang komponen-komponennya ditulis dengan huruf kecil.

Dua buah vektor adalah sama jika dan hanya jika mempunyai arah dan panjang (besar) yang sama. Dua buah vektor yang sama mempunyai komponen-komponen sepadan yang sama. Vektor A = ai + bj dan vektor B = ci + dj, maka A = B $\Leftrightarrow$ a = c dan b = d.

Jika A = ai + bj maka – ai – bj adalah vektor –A, yaitu vektor yang sama panjangnya, sejajar tetapi berlawanan arahnya dengan vektor A.

Sebuah vektor sering pula ditulis dalam bentuk matriks :

$$A = (\,a\;b\,)\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = ai + bj$$

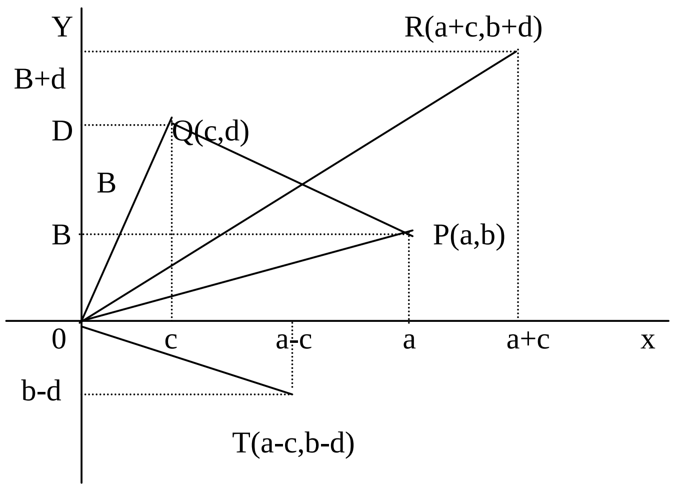
Sebuah vektor dalam ruang berdimensi tiga (E^3) ditulis :

$$A = (\,a\ b\ c\,)\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = ai + bj + ck$$

Jika $A = a_1i + a_2j + a_3k$ + dan $B = b_1i + b_2k + b_3k$, maka : $A = B \longleftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2$ dan $a_3 = b_3$. Vektor $-A = -a_1i - a_2j - a_3k$.

1.3.OPERASI VEKTOR

1.3.1. PENJUMLAHAN



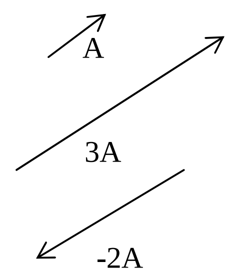
Gambar 2

Dua buah vektor A = ai + bj dan B = ci + dj dapat dijumlahkan dengan menjumlahkan komponen-komponennya yang sepadan. A + B = C = (a +c)i + (b + d)j. Jelaslah, bahwa komponen-komponen vektor jumlah itu adalah jumlah komponen-komponen yang sepadan dari vektor-vektor asalnya. Dalam contoh di atas, vektor jumlah merupakan diagonal jajaran genjang 0R, di mana A = 0P dan B = 0Q sebagai sisi-sisinya (lihat gambar 2). A + B dapat juga diperoleh dengan memindahkan B sejajar dengan dirinya sendiri menjadi vector B, sehingga titik pangkal B sejajar dengan berimpit dengan terminus A maka A + B adalah vektor yang titik pangkalnya berimpit dengan titik pangkal A dan terminusnya berimpit dengan terminus B. Demikian juga jumlah beberapa vektor : A + B + C + D, diperoleh dengan memindahkan B sejajar dengan dirinya sendiri menjadi vektor B, sehingga titik pangkal B berimpit dengan terminus A, kemudian dipindahkan vektor C sejajar dengan dirinya sendiri menjadi vektor C, sehingga titik pangkal C berimpit dengan terminus B, kemudian dipindahkan vektor D sejajar dengan dirinya sendiri menjadi vektor D, sehingga titik pangkal D berimpit dengan terminus C, jadi vektor jumlah dari keempat vektor itu A + B + C + D adalah vektor yang titik pangkalnya berimpit dengan titik pangkal A dan terminusnya terminus vektor D. Jumlah vektor dalam ruang berdimensi tiga (E^3) dapat juga dicari dengan cara yang sama.

1.3.2. PENGURANGAN

Pengurangan dua vektor : A – B = D. Jika vektor A = ai + bj dan B = ci + dj, maka A – B = D = 0T = (a – c)i + (b – c)j yang komponen-komponennya selisih komponen-komponen yang sepadan dari vector asalnya (lihat gambar 2)

1.3.3. PERKALIAN DENGAN SKALAR



Gambar 3

Mengalikan sebuah vektor A = ai + bj dengan sebuah skalar m, adalah mA = m(ai + bj) = (ma)i + (mb)j, yaitu mengalikan komponen-komponennya dengan skalar m. Secara geometri mA adalah sebuah vektor yang panjangnya $|m|$ kali panjang vektor A, sejajar dan arahnya sama dengan arah A jika m > 0, dan arahnya berlawanan dengan arah A jika m < 0. Jadi 3A adalah sebuah vektor yang sejajar dan searah dengan A dan panjangnya 3 kali panjang A: sedang vektor –2A adalah sebuah vektor yang sejajar dengan vektor A, arahnya berlawanan dengan vektor A, dan panjangnya 2 kali panjang vektor A (lihat gambar 3). Panjang vektor A dinyatakan dengan $|A|$ dan dibaca panjang (besar) vektor A. Jika A = ai + bj, dimana $|A| = |0P|$ sebagai hipotenusa segi tiga $0P_1P$ (lihat gambar 1) dan sisi-sisi siku-sikunya $0P_1$ dan P_1P yang panjangnya berturut-turut $|a|$ dan $|b|$, maka menurut Phytagoras

$$|A| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Jika A = ai + bj + ck maka panjang vektor A = $|A| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Mencari panjang vektor yang bukan vektor posisi, dapat dilakukan sebagai menghitung panjang sepotong garis dalam koordinat kartesius. Misalkan titik pangkal vektor $P_1(x_1,y_1,z_1)$ dan terminusnya $P_2(x_2,y_2,z_2)$ maka panjang vector P_1P_2 adalah :

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Bola adalah tempat kedudukan titik-titik yang sama jaraknya terhadap sebuah titik, maka (*) dapat dipandang sebagai persamaan jarak setiap titik P pada bola dengan radius r terhadap titik pusat $P_1(x_1,y_1,z_1)$. P(x,y,z) terletak pada bola, jika dan hanya jika : $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r^2$

S o a l :

Diketahui vektor-vektor A = 2i + 3j – 6k ; B = 7i – 4j + 4k ; dan C = i + 4j – 9k

1. Tentukanlah : a) 2A – 3B + C ; b) A + 2B – 3C ; c) –2A – B + 3C ; d) 2(A + 2S) – 3(A – C)
2. Hitunglah panjang (besar) vector-vektor :
   a) A ; b) B ; c) C ; d) (A – 2B) ; e) (A – 2B + C)
3. Hitunglah panjang vector-vektor tersebut pada soal No.1 .

II. VEKTOR SATUAN

2.1. VEKTOR SATUAN

Vektor U yang mempunyai panjang yang sama dengan ukuran satuan panjang yang dipakai pada sumbu-sumbu koordinat, disebut SATUAN VEKTOR. Jika U satu satuan vektor yang diperoleh dengan memutar vektor satuan i sebesar θ dengan arah positif (berlawanan dengan arah jarum jam), maka U mempunyai komponen horizontal $U_x = \cos\theta$, dan komponen vertikal $U_y = \sin\theta$, sehingga U = 0P = i sin θ, sehingga U = 0P = i cos θ + j sin θ. Jika sudut θ bervariasi dari 0 sampai 2π, maka titik P menempuh lingkaran satuan $x^2 + y^2 = 1$

Vektor A yang bukan NOL, vektor satuannya disebut arah vektor, ditulis $\dfrac{A}{|A|}$

2.2. VEKTOR NOL

Sebuah vektor yang panjangnya NOL, disebut VEKTOR NOL. Vektor nol hanya digambarkan oleh sebuah titik saja. Arah vektor nol tidak tentu. Vektor V = ai + bj = 0 a = 0, b $\leftrightarrow$ 0.

2.3. SIFAT-SIFAT

Jika A, B dan C masing-masing vektor dalam bidang, maka vektor-vektor itu memenuhi :

a.	A + B = B + A	sifat komutatif
b.	A + (B + C) + (A + B) + C	sifat asosiatif
c.	K(A + B) = kA +kB (k skalar)	Sifat distributive

S o a l :

Diketahui vektor-vektor : A = 3i + 4j + 12k ; B = 4i – 3j – 12k dan C = 9i – 8j + 12k

1. Tentukanlah vektor-vektor : a) A + B - C ; b) A - 2B + C ; c) 2A – B + C ;
   d) 2A – 3B ; e) A + 2B – 2C
2. Tentukanlah panjang vektor : a) A ; b) B ; c) C ; d) A – B ; e) A – C ; f) B – C ;
   g) A + B ; h) A + C ; i) A – 2B + 2C
3. Tentukanlah vektor satuan dari vektor-vektor tersebut pada 2.
4. Tulislah vektor-vektor pada No.1 dalam bentuk matriks.
5. Gambarlah vektor-vektor pada No.1
   a) dengan prinsip diagonal jajaran genjang
   b) dengan menyambung pada terminus vektor lain.

3. PRODUK (PERKALIAN) DUA VEKTOR

3.1. PRODUK SKALAR

Jika diketahui dua vektor A dan B, maka produk skalar kedua vektor itu dinyatakan dengan A.B (baca A dot B). Produk ini disebut juga dot product, karena memakai simbol dot (titik). Hasil produk skalar dari 2 vektor, adalah skalar.

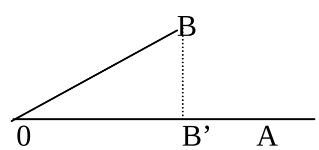
Produk skalar atau dot product 2 vektor A dan B didefinisikan :

$A.B = |A|\ |B| \cos\theta$ dimana (A,B) = 0

Produk skalar 2 vektor adalah komutatif :

$A.B = |A|\ (|B| \cos\theta)$

$B.A = |B|\ (|A| \cos\theta)$



Gambar 4

Produk skalar A.B dapat juga dinyatakan

Dalam komponen-komponen vektor-vektor itu sebagai berikut :

Diketahui $A = a_1 i + a_2 j$; $B = b_1 i + b_2 j$

Misalkan $C = B – A = (b_1 – a_1)i + (b_2 – a_2)j$.

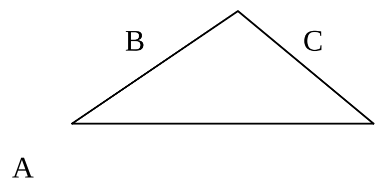
Menurut rumus cos. Dalam segitiga yang sisi-sisinys A, B dan C :

$|C|^2 = |A|^2 + |B|^2 - a|A|\ |B| \cos\theta$

$$|A|\ |B| \cos\theta = \frac{|A|^2 + |B|^2 - |C|^2}{2}$$

$$= \frac{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + b_1^{\,2} + b_2^{\,2} - (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}{2}$$

$$= \frac{2a_1b_1 + 2a_2b_2}{2} = a_1b_1 + a_2b_2$$



Jadi A.B = $|A|\ |B|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2$ (skalar)

Gambar 5

Produk skalar dua vektor, adalah skalar yang besarnya sama dengan jumlah hasil kali komponen-komponennya yang sepadan (komponen-komponen dinyatakan dengan skalar). Untuk dua vektor dalam E^3 pun, berlaku sifat ini.

Jika $A = a_1i + a_2j + a_3k$ dan $B = b_1i + b_2j + b_3k$ maka

$$A.B = |A|\ |B|\cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Produk skalar 2 vektor adalah distributive :

A.(B +C) = A.B + A.C

(A + B).C = A.C +B.C

(A + B).(C + C) = A.C + A.D + B.D

Jelaslah bahwa apabila produk skalar 2 vektor = NOL, maka kedua vektor itu saling tegak lurus, karena cos 90° = 0. Vektor NOL tidak mempunyai arah, dan dapat dikatakan, bahwa vektor nol tegak lurus pada tiap vektor yang lain. Jika produk skalar 2 vektor positif, maka cos 0 positif dan sudut antara kedua vektor itu adalah lancip. Jika produk skalar 2 vektor negatif, maka cos θ negatif, dan sudut antara kedua vektor itu adalah tumpul. Jika B + cA (c skalar), maka sudut yang dibentuk kedua vektor itu adalah 0°, jadi cos 0 = 1, dan A.B = $|A|\ |B|$. Jika A = B, maka sudut kedua vektor itu adalah 0, dan A.B = A.A = $|A|^2$

Contoh : Nyatakanlah komponen B_1 dan B_2 dari vektor B, di mana B_1 sejajar dengan A yang diketahui dan B_2 tegak lurus pada A.

Jawab : $B = B_1 + B_2$; $B_1 = cA$ dan $B_2.A = 0$. Dengan substitusi B_1 maka $B = cA + B_2$ dan skalar c diperoleh dari persamaan $B_2 .A = 0 \longrightarrow (B - cA).A = 0$

$\longrightarrow$ B.A – cA.A = 0 $\longrightarrow c = \dfrac{B.A}{A.A} \longrightarrow B_2 = B - B_1 = B - cA \longrightarrow$

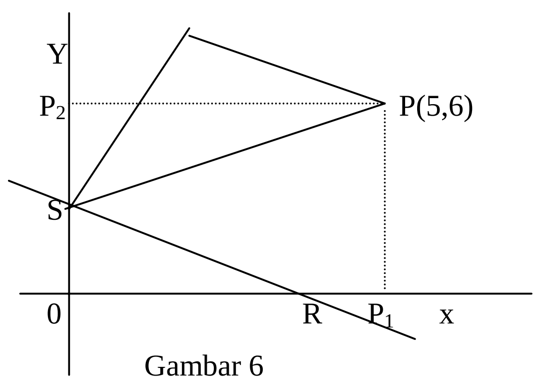
$$c = B - \frac{B.A}{A.A}A$$

Misal : B = 2i + j – 3k dan A = 3i – j $\rightarrow c = \dfrac{B.A}{A.A} = \dfrac{6-1}{9+1} = \dfrac{1}{2}$

Contoh : Tunjukkanlah bahwa vektor N = ai + bj tegak lurus pada garis lurus g : ax + by + c = 0.

Jawab : Ambil dua titik $P_1(x_1,y_1)$ dan $P_2(x_2,y_2)$ pada garis g, maka berlaku $ax_1 + by_1 + c = 0$ dan $ax_2 + by_2 + c = 0$. Hilangkan c dari keduanya : $a(x_1 – x_2) + b(y_1 – y_2) = 0$ vektor $P_1P_2 = a(x_2 – x_1)i + (b_2 – b_1)j$ dan N = ai + bj akan dibuktikan N tegak lurus pada P_1P_2. Dengan produk skalar didapat $(ai + bj).((x_2 – x_1)i + (b_2 – b_1)j) = 0$. jadi : $N.P_1P_2 = 0$ atau keduanya saling tegak lurus. Diketahui bahwa g : ax +by + c = 0 adalah garis lurus, jadi a dan b tidak 0 sekaligus, dan dari sini N tidak sama dengan 0. dapat dipilih titik P_2 berlainan dai P_1, jadi P_1P_2 tidak sama dengan 0. karena itu N tegak lurus P_1P_2, berarti N tegak lurus pada garis g.

Misal : Jika garis g : 2x – 3y – 5 + 0 maka vektor N = 2i – 3j tegak lurus pada g, dan N disebut normal ke garis g itu.



Gambar 6

Contoh : Diketahui garis g : 3x + 4y – 12 = 0. Carilah jarak titik P(5,6) ke garis itu

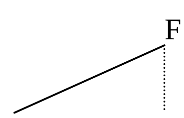
Jawab : Garis g memotong sb-y di titik S(0,3). Tarik dari S normal ke garis g. jarak P ke garis g adalah d = $|SP| \cos\theta$. Ini didapat dari dot product N.SP = $|N|\ |SP| \cos\theta = |N| d$.

$d = \dfrac{N.SP}{|N|}$. Karena SP = 5i + 3j dan N = 3i + 4j maka

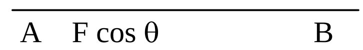
$$d = \frac{5.3 + 3.4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{27}{\sqrt{25}} = \frac{27}{5} = 5{,}4$$

Dapat juga vektor N ditarik dari R, dan perhitungan selanjutnya sama seperti di atas.

Produk skalar dipakai juga dalam mekanika.



Menghitung usaha oleh gaya F jika titik itu mengalami perpindahan AB. Jika arah gaya itu tetap, maka usaha diperoleh dengan menghitung :



Gambar 7

$W = (|F| \cos\theta)\ |AB| = F.AB$

Jika dalam pernyataan vektor $B = b_1i + b_2j + b_3k$, $b_1 = 1$ dan $b_2 = b_3 = 0$, maka B = i. Dan jika $A = a_1i + a_2j + a_3k$, maka $A.B = A.i = a_1$. Demikian jugalah $A.j = a_2$ dan $A.k = a_3$. diketahui bahwa a_1, a_2 dan a_3 adalah komponen-komponen vector A berturut-turut dalam arah i, j dan k. Umumnya jika U suatu vektor satuan, maka komponen A dalam arah U adalah produk skalar :

$A.U = |A|\,|U| \cos\theta$ = komponen A dalam arah U.

Jika B suatu vektor tidak NOL, dapat ditulis U = $U = \frac{B}{|B|}$ Karena arah B dalam U, maka komponen A pada arah B = $A.\frac{B}{|B|}$. Proyeksi vektor A pada B adalah (komponen A dalam B) dikalikan dengan (arah B) yaitu : $\frac{A.B}{|B|}.\frac{B}{|B|}$ atau $\left(\frac{A.B}{B.B}\right)B$

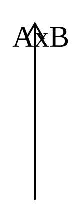
S o a l :

Diketahui A = 2i + 3j + 6k ; B = 3i – 6j + 2k ; C = 3i – 6j +6k

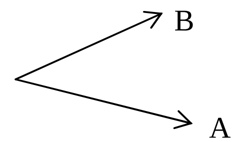
1. Tentukanlah a) D = A – 2B ; b) E = 2A – B ; c) F = A + B + 2C
2. Tentukanlah : a) A.B ; b) A.C ; c) B.C ; d) A.D ; e) B.E ; f) C.D
3. Besarnya sudut yang dibentuk tiap pasang vektor pada No.2.
4. Tentukanlah jarak titik P(7,8) ke garis g : 3x – 4y + 24 = 0
5. Diketahui vektor-vektor A = 4i – 3j + 12k dan B = 3i + 5j – 2k
   a. Nyatakan komponen B1 dan B2 dari vektor B di mana B1//A dan B2 tegak lurus pada A.
   b. Hitung usaha oleh gaya F jika titik itu mengalami perpindahan 0P (0 titik pangkal B dan P terminus B) sedang F = A dengan 0 titik pangkalnya.

3.2. PERKALIAN VEKTOR atau CROSS PRODUCT

Perkalian vektor atau cross product atau vector product dari vektor A dan vektor B ditulis A = B. hasil perkalian dua buah vektor



adalah sebuah vektor. Dua buah vektor A dan B yang mempunyai titik pangkal yang berimpit membentuk sudut θ. ($0<\theta<\pi$). Jika A dan B tidak berimpit, keduanya membentuk sebuah bidang. Andaikan U satuan vektor yang tegak lurus pada



Gambar 8

bidang (A,B) dengan arah sekerup kanan yang diputar dari A ke B (lihat gambar 8), maka haasil kali cross product A ke B didefinisikan :

$$A \times B = U\,|A|\;|B|\,\sin\theta$$

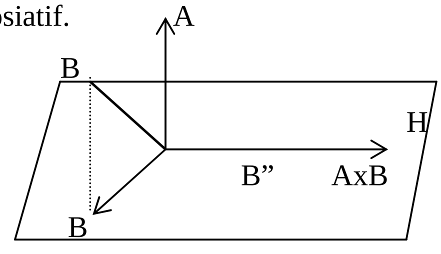
Jika A dan B sejajar, θ = 0° atau θ = 180° dan sin θ = 0, maka A x B = 0. dalam hal ini arah U tidak ditentukan. Dalam hal lain U dapat ditentukan, dan cross product dua vektor adalah sebuah vektor yang sama arahnya dengan U dan besarnya sama dengan bilangan yang menyatakan luas jajaran genjang yang sisinya $|A|$ dan $|B|$ serta membentuk sudut 0. Jadi jelaslah bahwa panjang vektor hasil kali dari cross product A dan B adalah :

$$|A \times B| = |C| = |U|\;|A|\;|B|\,\sin\theta.$$

Jika perkalian vektor di atas dari B ke A, jadi arahnya dari B ke A, maka arah vektor satuan berlawanan dengan yang di atas, menjadi – U, sehingga cross product B x A =
- A x B. Jika definisi itu dipakai untuk vektor satuan i, j dan k (pada sumbu-sumbu koordinat) maka :

$$i \times j = -\,j \times i = k$$
$$j \times k = -\,k \times j = i$$
$$k \times i = -\,i \times k = j$$
$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

Selanjutnya berlaku (rA) x (sB) = rs(A x B) asosiatif.
Perhatikan gambar 9. Bidang H ⊥ A.
Vektor B dan A membentuk sudut θ.
Vektor B diproyeksikan pada bidang H,
Yaitu vektor B’ yang panjangnya
$|B'| = |B| \sin\theta$. Vektor B’ diputar



Gambar 9

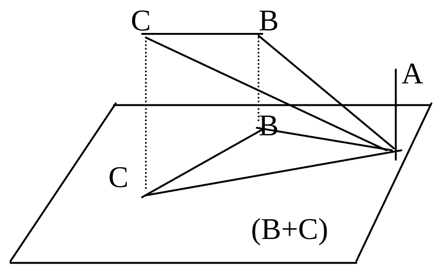
(sumbu putar vektor A) dengan sudut +90° menghasilkan B”. jika vektor B” dikalikan dengan panjang vektor (skalar) $|A|$, maka hasil kali $|A|$B” = a = b, karena B” mempunyai arah yang sama dengan arah U (cross product) dan

$$|A|\;|B''| = |A|\;|B'| = |A|\;|B|\,\sin\theta = |A \times B|$$

Jadi ketiga operasi itu adalah :

1. Proyeksikan ke H
2. Putar (sumbu putar A) dengan sudut $+90°$
3. Kalikan dengan skalar $|A|$

Jika operasi itu diterapkan pada sebuah segitiga, diperoleh sebuah segitiga lain. Perhatikanlah gambar 10, segitiga dengan sisi-sisi B, C, dan (B+C).



Gambar 10

Jika diterpkan ketiga langkah itu akan diperoleh :

1. Segitiga yang sisi-sisinya B’, C’ dan (B + C)’
   Memenuhi persamaan vektor B’ + C’ = (B +C)’
2. Segitiga yang sisi-sisinya B”, C” dan (B” + C”)
   Memenuhi persamaan vektor B” + C” = (B + C)”
3. segitiga yang mempunyai sisi-sisi $|A|$B”, $|A|$C” dan $|A|$(B+ C)’
   memenuhi persamaan vektor $|A|$B” + $|A|$C” = $||A|$(B + C)”

Apabila dipakai persamaan-persamaan :

$|A|$B” = A x B

$|A|$C” = A x C

$|A|$(B+C)” = A x (B X C)

yang didapat dari kesimpulan di atas, maka diperoleh :

A x b + A x C = A x (B + C)

Yaitu sifat distributive perkalian vektor (cross product)

Kawan dari sifat ini adalah (D + C) x A = B x A + C x A

Dengan menggunakan cross product dan rumus-rumus aljabar, dapat ditentukan vektor hasil dari A x B.

Jika $A = a_1i + a_2j + a_3k$ dan $B = b_1i + b_2j + b_3k$, maka

$A \times B = (a_1i + a_2j + a_3k) \times (b_1i + b_2j + b_3k)$

$= (a_1b_1)i \times I + (a_1b_2)I \times j + (a_1b_3)I \times k + (a_2b_1)j \times I + (a_2b_2)j \times j + (a_2b_3)j \times k + (a_3b_1)k \times I + (a_3b_2)k\ xk \times j + (a_3b_3)k \times k$

$= (a_3b_3 – a_3b_2)I – (a_3b_2)I – (a_1b_3 – a_3b_1)j + (a_1b_2 – a_2b_1)k$

Keenam suku ruas kanan sama dengan keenam suku penyeleseian determinan ordo 3 x 3, sehingga hasilkali cross product vektor A.

Dan B di atas adalah : $A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ & & \end{vmatrix}$

$b_1\ b_2\ \ b_3$

Contoh : Hitunglah luas segitiga ABC, jika A(1,-1,0), B(2,1,-1) dan C(-1,1,2).

Jawab : Dua sisi segitiga itu dinyatakan dengan vektor-vektor : AB = (2-1)i + (1+1)j + (-1-0)k = i + 2j – k

AC = (-1 –1)I + (1 + 1)j + (2+ 0)k = - 2i + 2j +2k

Vector V = AB x AC = $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ = 6i + 6k

besarnya V = $|V| = \sqrt{6^2+6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$, yang sama dengan luas jajaran genjang yang sisi-sisinya AB dan AC, dimana luas ini 2 kali luas segitiga ABC. Jadi luas segitiga ABC = ½ $|$ AB x AC $|$ = $3\sqrt{2}$

Contoh : Tentukanlah vektor satuan yang tegak lurus pada vektor A = 2i + j – k dan B = i – j + 2k

Jawab : Vektor N = A x B tegak lurus pada kedua vektor A dan B sedang U = c(a x B) adalah juga vektor N yang dikalikan dengan skalar c = 0, dan c dapat dipilih sehingga U menjadi vektor satuan.

Jadi : N = A x B = $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ = i – 5j – 3k

U.U = c^2N.N = $c^2\sqrt{1^2+(-5)^2+(-3)^2}$ = 35c^2 $\rightarrow c = \pm\frac{1}{\sqrt{35}}\ jadi U = \frac{i-5j-3k}{\sqrt{35}}$

Soal : Diketahui dalam E^3 titik-titik A(1,-1,1), B(2,3,-1), C(-1,2,2) dan D(3,1,9)

1. Tentukanlah vektor-vektor : a) 0A ; b) 0B ; c) 0c ; c) AB ; e) AC dan f) BC
2. Jika P, Q dan R berturut-turut pertengahan, sisi-sisi AB, BC dan CA tentukanlah koordinat P, Q dan R.
3. Tentukanlah E sehingga ABCE jajaran genjang.
4. Tentukanlah koordinat titik berat segitiga ABC
5. Tentukanlah besarnya sudut-sudut segitiga ABC.
6. Tentukanlah normal pada ketiga sisi segitiga itu
7. Tentukanlah : a) 0A x 0B ; b) 0A x 0C ; c) 0B x 0C ; d) AB x AC ; e) BC x BA
8. Hitunglah luas segitiga ABC
9. Hitunglah : a) jarak C dari AB ; b) jarak B dari AC.
10. Hitunglah jarak D dari bidang ABC.

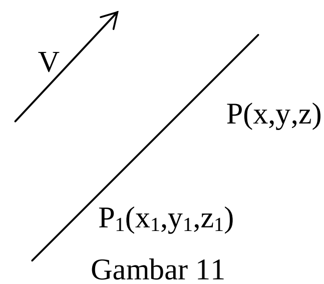
4. PERSAMAAN GARIS DAN PERSAMAAN BIDANG DATAR

PERSAMAAN GARIS

Andaikan g sebuah garis melalui $P_1(x_1,y_1,z_1)$ sejajar dengan sebuah vektor bukan nol V = ai + bj + ck. Garis g adalah tempat kedudukan semua titik P(x,y,z) sedemikian, sehingga vektor P_1P sejajar dengan vektor V yang diketahui. P pada garis g jika dan hanya jika ada suatu skalar t, sehingga $P_1P = tV$, atau

$(x - x_1)i + (y - y_1) + (z - z_1)k = t(ai + bj + ck)$

(lihat gambar 11)



Gambar 11

$P_1P = tV$, maka $x - x_1 = ta$; $y - y_1 = tb$ dan $z - z_1 = tc$. (*). Jika t variable dari $-\infty \to +\infty$, maka titik P(x,y,z) bergerak melintasi garis g yang melalui P_1 itu. Ketiga persamaan (*) secara simultan adalah persamaan parameter garis g dalam E^3. Jika t dieliminir dari ketiga persamaan parameter itu, diperoleh persamaan garis lurus g :

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Yaitu persamaan garis yang sejajar dengan vector V = ai + bj + ck

S o a l :

Diketahui segiempat ABCD di mana A(4,1), B(8,4), C (7,10) dan D(5,9). Titik-titik P, Q, R dan S adalah titik-titik tengah AB, BC, CD dan DA.

1. Buktikanlah bahwa PQRS adalah sebuah jajaran genjang.
2. Hitunglah jarak C ke AB, demikian juga jarak D ke garis AB.
3. Tentukanlah vektor AB, BC, CD dan AD. Hitunglah juga panjang (besar) vektor-vektor itu.
4. Hitunglah besar sudut-sudut segiempat itu.
5. Hitunglah jarak titik C ke garis AB, demikian juga jarak titik D ke garis AB.
6. Buatlah persamaan garis melalui P(1,2,-3) sejajar dengan vektor V = 2i – 3j + 5k.