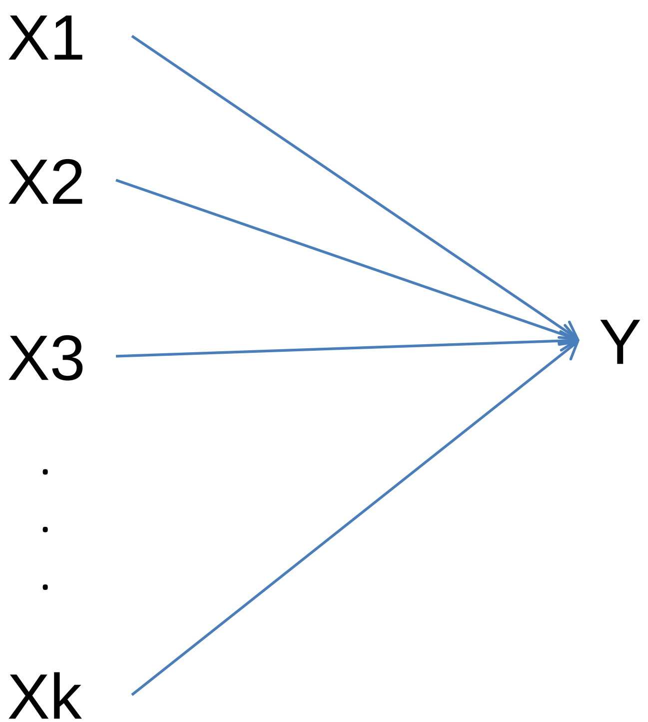
Analisis Hubungan Fungsional (Regresi)

- Analisis korelasi digunakan untuk mencari arah dan kuatnya hubungan antara 2 peubah atau lebih,
- Analisis regresi digunakan untuk memprediksi perubahan nilai variabel dependen, bila variabel independen diubah.



Modelnya:

$$Y = f(X_1, X_2, X_3 \cdots X_k)$$

- Linear
- Non linear

Regresi Sederhana

- Misal diketahui *n* pasang data $(x_i, y_i), i = 1,2,3,\cdots,n$

  akan ditaksir persamaan regresi $\mu_{Y|X} = \beta_0 + \beta_1 X$ dengan

$$\hat{Y}_i = b_0 + b_1 X_i \;\; atau \; \hat{Y}_i = a + bX_i$$

- Untuk menaksir persamaan tersebut digunakan penaksir kuadrat terkecil (*least square estimation*), hasilnya :

$$a = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{2}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{2}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}$$

$$b = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{2}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}$$

Atau dapat juga dengan

$$b = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{2}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}$$

$$a = \overline{Y} - b\overline{X}$$

Selain itu, dapat juga digunakan cara:

$$\sum x^2 = \sum (X - \overline{X})^2 = \sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n}$$

$$\sum xy = \sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{n}$$

Sehingga kita dapat menghitung nilai a dan b sbb:

$$b = \frac{\sum xy}{\sum x^2} \quad dan$$

$$a = \overline{Y} - b\overline{X}$$

Cara yang lebih umum, dapat digunakan cara maktriks, yakni sbb:

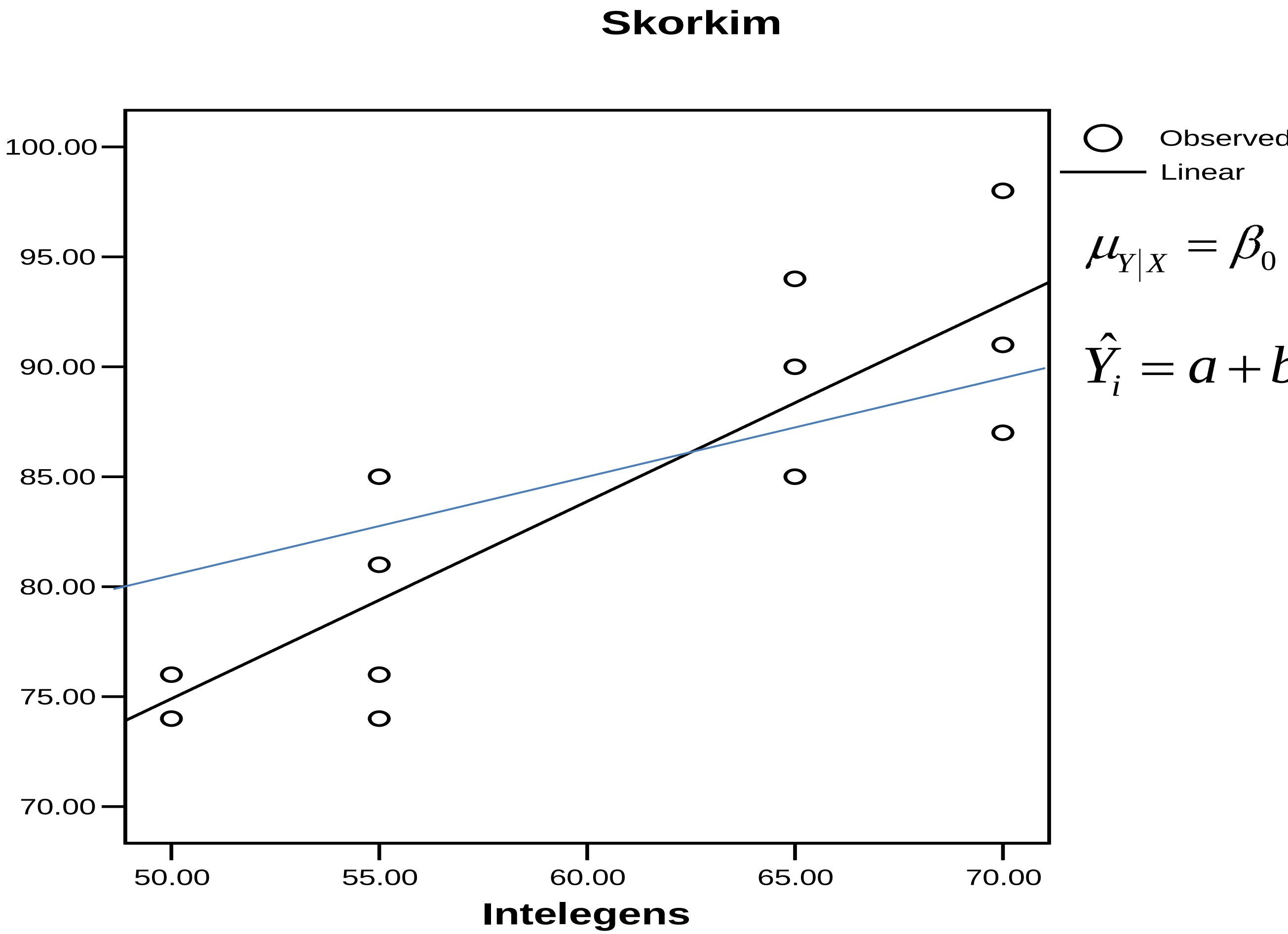
$$b = (X'X)^{-1} X'Y$$

Dengan:

$$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} \\ \vdots & X_{21} \\ 1 & X_{31} \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$



$$\mu_{Y|X} = \beta_0 + \beta_1 X$$

$$\hat{Y}_i = a + bX_i$$

- Koefisien Determinasi.

  Koefisien determinasi menyatakan besar pengaruh variabel X terhadap variabel Y dinyatakan, ditulis sebagai R^2 dengan

$$R^2 = \frac{\sum (Y_i - \bar{Y})^2 - \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{SS_{tot} - SS_{res}}{SS_{tot}}$$

$$atau$$

$$R^2 = \frac{SS_{reg}}{\sum y^2}$$

$$atau$$

$$R^2 = \frac{(\sum xy)^2}{\sum x^2 \sum y^2}$$

nilainya akan berada pada $0 \leq R^2 \leq 1$

Beberapa Pengujian

Pengujian Keberartian Koefisien (b_1)

- Hipotesis yang diuji:

  Ho : Koefisien arah tidak berarti $(b_1 = 0)$

  H1 : Koefisien arah berarti $(b_1 \neq 0)$

- Pengujian dengan uji Student-t.
  Hitung nilai t

$$t = \frac{b_1}{s_b}$$

Dengan

$$s_{Y.X} = s_e = \frac{\sum (Y_i - \hat{Y})^2}{n-2} = \left(\frac{n-1}{n-2}\right)(s_Y^2 - b^2 s_x^2)$$

$$s_b^2 = \frac{s_{Y.X}^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

Kriteria : Tolak Ho jika t hitung $\geq$ t tabel, pada α dan dk = n-1 (tabel uji dua pihak)

- ANOVA

Secara matematis dapat ditunjukkan bahwa

$$\sum Y_i^2 = \frac{\left(\sum Y_i\right)^2}{n} + b\sum \left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right) + \sum \left(Y_i - \hat{Y}\right)$$

Atau

$$\sum Y_i^2 = \frac{\left(\sum Y_i\right)^2}{n} + JK(b|a) + JK_{res}$$

dengan

$$JK\left(b|a\right) = b\left\{\sum X_i Y_i - \frac{\sum X_i \sum Y_i}{n}\right\}$$

TABEL ANAVA

Sumber Keragaman	Jumlah Kuadrat	Derajat Bebas	Kuadrat Tengah	F hitung
JK (a)	1	$\left(\sum Y_i\right)^2/n$		
JK(b | a)	1	JK(b | a)	$s^2_{reg} = \frac{JK(b\|a)}{1}$	$F_h = \frac{s^2_{reg}}{s^2_{res}}$
JK Residu	n – 2	$\sum \left(Y_i - \hat{Y}\right)^2$	$s^2_{res} = \frac{\sum \left(Y_i - \hat{Y}\right)^2}{n-2}$	
Total	n	$\sum Y_i^2$		

Kriteria : tolak Ho pada taraf nyata α bila :

$F_h > f\alpha[1, n-2]$.

Atau F dapat juga dihitung dengan cara:

$$F = \frac{SS_{reg}/k}{SS_{res}/(n-k-1)} \quad atau$$

$$F = \frac{r^2/k}{\left(1-r^2\right)/(n-k-1)}$$

Dengan :

$$SS_{reg} = b\sum xy = b^2\sum x^2 = r^2\sum y^2$$

$$SS_{res} = \sum y^2 - SS_{reg} = \left(1-r^2\right)\sum y^2$$

Uji Kelinearan Model Regresi Sederhana

Xi	Yi
X1	Y11
X1	Y12
.	
. n1	
.	
X1	Y1n1
X2	Y21
.	
. n2	
.	
X2	Y2n2
Xk	Yk1
.	
. nk	
.	
Xk	Yknk

Hipotesis:

Ho : Model regresi linear

H1 : Model regresi tak linear

$$JK(E) = \sum_{X} \left\{ \sum Y_i^2 - \frac{\left(\sum Y_i\right)^2}{n_i} \right\}$$

$$JK(TC) = JK_{res} - JK(E)$$

$$F_h = \frac{JK(TC)/k-2}{JK(E)/n-k}$$

Kriteria: Tolak Ho jika F hitung lebih besar dari F tabel dengan dk = ((k-2),(n-k)) pada α yang ditetapkan